MAR 1

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 166

Heft 3

Ausgegeben den 27. Februar 1932.

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1932

Band 166. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Mahler, Kurt, Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil II	137
Kaufmann, Boris, Über Stützstreckenverteilung und Zerlegung konvexer Figuren in konvexe Teilfiguren ohne geradlinige Begrenzungsteile	151
Haenzel, Gerhard, Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz und deren Anwendung	167
Köthe, Gottfried, Über Schiefkörper mit Unterkörpern zweiter Art über dem Zentrum	182
Jung, Heinrich, Ein Beitrag zur Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ mittels Greenscher Funktionen	185
Weiss, E. A., Der Hyperkreis und sein Laguerresches Bild	193

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil II [1]).

Von *Kurt Mahler* in Göttingen.

IV.

14. Im Gegensatz zu bisher werde $\varrho_0 = \varrho_1 = \cdots = \varrho_m = \varrho$ als feste endliche natürliche Zahl und m als eine natürliche Zahl, die über alle Grenzen wächst, angenommen und dann

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = A_{k+1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & m \\ \varrho & \varrho & \dots & \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{e^{z\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{h=0}^{m} (\mathfrak{z}+k-h)^{\varrho}},$$

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \quad R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & m \\ \varrho & \varrho & \dots & \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\infty} \frac{e^{z\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{h=0}^{m} (\mathfrak{z}-h)^{\varrho}}$$

gesetzt, so daß

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{k=0}^{m} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) e^{kz}$$

ist. Offenbar ist

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{l=0}^{\varrho-1} \frac{z^l}{l!} A_k^{(l)}\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right), \qquad A_k^{(l)}\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{\mathfrak{z}^{l-\varrho}\, d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{\substack{h=0 \\ h\neq k}}^{m} (\mathfrak{z}+k-h)^{\varrho}}.$$

Setzt man

$$\psi_k\left(\mathfrak{z} \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \prod_{\substack{h=0 \\ h\neq k}}^{m} (\mathfrak{z}+k-h)^{-\varrho},$$

so ist also

$$(\varrho-l-1)!\, A_k^{(l)}\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \left(\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^{\varrho-l-1} \psi_k\left(\mathfrak{z} \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\Big|_{\mathfrak{z}=0}.$$

15. Um die Ableitungen von $\psi_k(\mathfrak{z})$ zu bestimmen, werde die Funktion

$$\chi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z} \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{\substack{h=0 \\ h\neq k}}^{m} (\mathfrak{z}+k-h)^{-l}$$

---

[1]) Teil I erschien als letzter Beitrag zu Heft 2 dieses Bandes. —

Druckfehler-Berichtigung zum ersten Teil dieser Arbeit:

S. 121, Zeile 8 von unten: man lese $z_1^{\alpha_1}$ statt z^{α_1}.

S. 121, Zeile 6 von unten: man lese $\mathfrak{a}_1 \omega_{m\mathfrak{a}_1}(z_2)$ statt $\mathfrak{a}_1 \omega_{m\mathfrak{a}_1} \mathfrak{a}_2(z_2)$.

S. 127, Zeile 3 von unten: man lese Spalte statt Zeile.

eingeführt. Macht man den Ansatz

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^l \psi_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \psi_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \Phi_k^{(l)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right),$$

so findet man

$$\Phi_k^{(0)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = 1, \quad \Phi_k^{(1)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = -\varrho\chi_k^{(1)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right), \quad \Phi_k^{(2)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \varrho^2\chi_k^{(1)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)^2 + \varrho\chi_k^{(2)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right).$$

Allgemeiner ist offenbar

$$\frac{d}{dz}\chi_k^{(l)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = -l\chi_k^{(l+1)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

und

$$\Phi_k^{(l+1)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = -\varrho\chi_k^{(1)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\Phi_k^{(l)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) + \frac{d}{dz}\Phi_k^{(l)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right).$$

Durch Schluß von l auf $l+1$ ergibt sich daher aus den letzten Formeln der Hilfssatz:

a) Es ist identisch

$$\Phi_k^{(l)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+l\lambda_l=l} C_{\lambda_1,\ldots,\lambda_l}\,\varrho^{\lambda_1+\cdots+\lambda_l}\,\chi_k^{(1)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)^{\lambda_1}\cdots\chi_k^{(l)}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)^{\lambda_l},$$

wobei über alle Zerlegungen von l der Form

$$l = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + l\lambda_l$$

mit nichtnegativen ganzen rationalen λ summiert wird und die $C_{\lambda_1,\ldots,\lambda_l}$ gewisse ganze rationale Zahlen sind, die allein von der betreffenden Zerlegung, nicht aber von ϱ oder m oder k abhängen.

16. Zur Abkürzung werde gesetzt [2]):

$$M_m = m!, \qquad D_m = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Wegen

$$\psi_k\left(0 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \left(\frac{(-1)^{m-k}}{k!\,(m-k)!}\right)^\varrho, \qquad \chi_k^{(l)}\left(0 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{\substack{h=0 \\ h\neq k}}^{m} \frac{1}{(k-h)^l}$$

ist dann offenbar jede der Zahlen

$$M_m^\varrho\,\psi_k\left(0 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = (-1)^{(m-k)\varrho}\binom{m}{\varrho}^\varrho \quad \text{und} \quad D_m^l\,\chi_k^{(l)}\left(0 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

ganz rational; aus Hilfssatz a folgt also:

b) Die Zahl

$$M_m^\varrho\, D_m^\varrho \left(\frac{d}{dz}\right)^l \psi_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\Big|_{z=0} = \Psi_k^{(l)}\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

ist ganz rational.

Es gelingt unschwer, für $\Psi_k^{(l)}\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ obere Schranken anzugeben. Wenn ε eine positive Konstante ist, so besteht bekanntlich für $m \geqq m_0(\varepsilon)$ die Ungleichung [3])

$$D_m \leqq e^{(1+\varepsilon)m}.$$

Weiter ist

$$\binom{m}{k} \leqq 2^m, \qquad \left|\sum_{\substack{h=0 \\ h\neq k}}^{m} \frac{1}{(k-h)^l}\right| \leqq 2\sum_{h=1}^{m}\frac{1}{h^l} = O(e^{\varepsilon m}).$$

---

[2]) Das Zeichen $\{1, 2, \ldots, m\}$ bedeutet das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $1, 2, \ldots, m$.

[3]) Siehe hierzu: E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I, S. 74 u. 195

Demnach ergibt sich der weitere Hilfssatz:

c) Für jedes $\varepsilon > 0$ und gleichmäßig in k besteht die Ungleichung

$$\Psi_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} = O(e^{(1+\varepsilon)m\varrho}\, 2^{m\varrho}).$$

17. Setzt man

$$\mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} = M_m^{\varrho} D_m^{\varrho} \frac{(\varrho-1)!}{l!} A_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} = \binom{\varrho-1}{l} \Psi_k^{(\varrho-l-1)}\binom{m}{\varrho},$$

so sind nach b und c die Zahlen $\mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho}$ sämtlich ganz rational, und es ist gleichmäßig in den Indizes für genügend großes m

$$\left|\mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho}\right| \leqq (3e)^{m\varrho}.$$

Alsdann ist

$$(\varrho-1)!\, M_m^{\varrho} D_m^{\varrho} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{l=0}^{\varrho-1} \mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} z^l.$$

Es möge gesetzt werden:

$$\sum_{k=0}^{m} \mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} u^k = \boldsymbol{a}^{(l)}\left(u \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right).$$

Dann ist offenbar

$$(\varrho-1)!\, M_m^{\varrho} D_m^{\varrho} R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{l=0}^{\varrho-1} \boldsymbol{a}^{(l)}\left(e^z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) z^l.$$

Im folgenden nehmen wir e^z positiv rational an:

$$e^z = \frac{x}{y}$$

mit zwei teilerfremden natürlichen Zahlen x und y. Die Zahlen

$$y^m \boldsymbol{a}^{(l)}\left(e^z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = a_l\binom{m}{\varrho}$$

sind demnach ganz rational und genügen für genügend großes ϱ und m der Ungleichung

$$\left|a_l\binom{m}{\varrho}\right| \leqq (4e)^{m\varrho}.$$

Wird noch gesetzt:

$$(\varrho-1)!\, y^m M_m^{\varrho} D_m^{\varrho} R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = r\binom{m}{\varrho},$$

so sind demnach die Koeffizienten der Näherungsform

$$r\binom{m}{\varrho} = \sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l\binom{m}{\varrho} z^l$$

als ganz rational erkannt und nach oben abgeschätzt. Auch für den Wert dieser Näherungsform selbst können Schranken nach oben und unten hergeleitet werden.

18. Dazu beschränken wir uns auf zwei spezielle Fälle: entweder sei z reell und positiv, oder es sei $e^z = 1$ und $z = 2\pi i$.

Im ersten Fall werde ausgegangen von der Formel

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = (J^{\varrho} e^z)^m \frac{z^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!}.$$

Längs der Strecke

$$0 \leqq t \leqq z$$

ist

$$1 \leqq e^t \leqq e^z,$$

also nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$J^{m\varrho} \frac{z^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!} \leqq R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \leqq e^{mz} J^{m\varrho} \frac{z^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!}.$$

Hieraus ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{z^{m\varrho+\varrho-1}}{(m\varrho+\varrho-1)!} \leqq R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \leqq e^{mz} \frac{z^{m\varrho+\varrho-1}}{(m\varrho+\varrho-1)!}.$$

Nach der Stirlingschen Formel ist aber

$$m!^{\varrho} \sim (2\pi)^{\frac{\varrho}{2}} m^{\frac{\varrho}{2}} m^{m\varrho} e^{-m\varrho},$$

$$(m\varrho+\varrho-1)! \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} \varrho^{-\frac{1}{2}} m^{(m+1)\varrho} \varrho^{(m+1)\varrho} e^{-m\varrho},$$

also

$$\frac{m!^{\varrho}}{(m\varrho+\varrho-1)!} \sim \left(\frac{2\pi}{m}\right)^{\frac{\varrho-1}{2}} \varrho^{\frac{1}{2}-(m+1)\varrho}.$$

Bedeutet ε eine positive Konstante, so ist demnach für genügend großes m

$$z^{m\varrho} \varrho^{-m\varrho} e^{-\frac{m\varepsilon}{2}} \leqq M_m^{\varrho} R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \leqq z^{m\varrho} \varrho^{-m\varrho} e^{mz} e^{+\frac{m\varepsilon}{2}},$$

und da ferner nach dem Primzahlsatz für genügend großes m

$$e^{m-\frac{m\varepsilon}{2\varrho}} \leqq D_m \leqq e^{m+\frac{m\varepsilon}{2\varrho}}$$

ist, so erhält man für $m \geqq m_0(\varepsilon, \varrho)$ die Ungleichungen

$$\left(\frac{e\,z}{\varrho}\right)^{m\varrho} y^m e^{-m\varepsilon} \leqq r\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \leqq \left(\frac{e\,z}{\varrho}\right)^{m\varrho} y^m e^{mz} e^{+m\varepsilon}.$$

Diese Ungleichungen lassen sich im Verein mit den früheren in einer einfachen Form aussprechen. Sei

$$a = (4e)^{m\varrho};$$

alsdann können die vorigen Ungleichungen geschrieben werden:

$$a^{-\Omega_1} \leqq r\left(\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \leqq a^{-\Omega_2}$$

mit den Abkürzungen

$$\Omega_1 = \frac{1}{\log(4e)}\left(\log\varrho - \log(ez) - \frac{\log y - \varepsilon}{\varrho}\right),$$
$$\Omega_2 = \frac{1}{\log(4e)}\left(\log\varrho - \log(ez) - \frac{\log y + z + \varepsilon}{\varrho}\right), \qquad \Omega_1 > \Omega_2.$$

Mit wachsendem ϱ streben beide Zahlen gegen Unendlich, während ihre Differenz gegen Null konvergiert. *Bedeutet Ω eine beliebig große positive Zahl, so gibt es also eine natürliche Zahl ϱ, für die*

$$\Omega_1 > \Omega_2 \geqq \Omega$$

ist; alsdann gehören zu jeder genügend großen natürlichen Zahl m je ϱ ganze rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{\varrho-1}$, so daß zugleich

$$\max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{\varrho-1}|) \leqq C^m, \qquad C = C(\varrho) = (4e)^\varrho$$

und

$$C^{-m\Omega_1} \leqq \sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l \leqq C^{-m\Omega_2}$$

ist.

In dieser Aussage ist nach dem Transzendenzkriterium in 2. *insbesondere die Transzendenz von log ζ enthalten.*

19. Um ein entsprechendes Ergebnis für die Zahl π zu erhalten, werde weiter statt m die gerade Zahl $2m$ eingesetzt. Man hat offenbar

$$R\left(2\pi i \middle| \begin{matrix} 2m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{2\pi i \mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}}{\{\mathfrak{z}(\mathfrak{z}-1)\cdots(\mathfrak{z}-2m)\}^\varrho} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{2\pi i \mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}}{\{\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2-1^2)\cdots(\mathfrak{z}^2-m^2)\}^\varrho},$$

oder wenn die neue Veränderliche

$$u = \frac{i\mathfrak{z}}{m}$$

eingeführt wird:

$$R\left(2\pi i \middle| \begin{matrix} 2m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{i^{2m\varrho+\varrho-2}}{2\pi m^{2m\varrho+\varrho-1}} \int_{C_\infty} \left\{u\left(u^2+\frac{1^2}{m^2}\right)\cdots\left(u^2+\frac{m^2}{m^2}\right)\right\}^{-\varrho} e^{2\pi m u}\, du.$$

Hier kann der Integrationsweg leicht auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes übergeführt werden in eine Gerade G_α, die senkrecht zur reellen Achse durch den Punkt $\alpha > 0$ auf der reellen Achse geht; wird integriert in der Richtung vom Negativ-Imaginären zum Positiv-Imaginären, so ist dann

$$R\left(2\pi i \middle| \begin{matrix} 2m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{i^{2m\varrho+\varrho-2}}{2\pi m^{2m\varrho+\varrho-1}} \int_{G_\alpha} e^{2\pi m u - \varrho\,\tau(u)}\, du,$$

$$\tau(u) = \log u + \sum_{k=1}^{m} \log\left(u^2+\frac{k^2}{m^2}\right).$$

Dabei ist die u-Ebene längs der negativ-reellen Achse aufzuschneiden und in der aufgeschnittenen Ebene unter $\log u$ das Integral

$$\log u = \int_1^u \frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}$$

zu verstehen.

Die Funktion $\tau(u)$ läßt sich mittels der Eulerschen Summenformel vereinfachen. Bedeutet $S(x)$ die Funktion

$$S(x) = \frac{(x-[x])^2 - (x-[x])}{2},$$

so ist für zwischen 0 und m zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f(x)$

$$\frac{f(0)+f(m)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} f(k) = \int_0^m f(x)\, dx - \int_0^m f''(x)\, S(x)\, dx,$$

also mit $x = mt$

$$\tau(u) - \log\sqrt{u^2+1} = m\int_0^1 \log(u^2+t^2)\,dt - \frac{2}{m}\int_0^1 \frac{u^2-t^2}{(u^2+t^2)^2}\,S(mt)\,dt.$$

Das letzte Integral hat längs G_α gleichmäßig in u die Größenordnung

$$O(1),$$

während das erste Integral den genauen Wert

$$\frac{u}{i}\log\frac{u+i}{u-i} + \log(u^2+1) - 2$$

besitzt. Längs G_α ist somit gleichmäßig in u

$$\tau(u) = m\left\{\frac{u}{i}\log\frac{u+i}{u-i} + \log(u^2+1) - 2\right\} + \log\sqrt{u^2+1} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

In gleicher Weise findet man bei den Ableitungen

$$\tau^{(l)}(u) = (-1)^{l-1}(l-1)!\sum_{k=-m}^{+m}\left(u+\frac{ki}{m}\right)^{-l} \qquad (l=1,2,3)$$

die Werte

$$\tau'(u) = \frac{m}{i}\log\frac{u+i}{u-i} + \frac{u}{u^2+1} + O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \tau''(u) = -\frac{2m}{u^2+1} + O(1), \quad \tau'''(u) = O(m),$$

die ebenfalls gleichmäßig auf G_α gelten.

Von jetzt ab sei $\varrho \geqq 5$ und α durch die Gleichung

$$\frac{2\pi}{\varrho} = \frac{1}{i}\log\frac{\alpha+i}{\alpha-i} \equiv 2\operatorname{arc\,cotg}\alpha$$

bestimmt, also

$$\alpha = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{\varrho}.$$

Dann ist

$$\varrho\tau'(\alpha) = 2\pi m + \frac{\alpha\varrho}{\alpha^2+1} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Der Integrationsweg des Integrales

$$\Im = \int_{G_\alpha} e^{2\pi m u - \varrho\tau(u)}\,du = i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi m(\alpha+ti)-\varrho\tau(\alpha+ti)}\,dt$$

werde zerlegt in die Teilintervalle

$$(-m^{-2/5}, +m^{-2/5}), \quad (-\infty, -m^{-2/5}), \quad (+m^{-2/5}, +\infty).$$

Im ersten Intervall ist nach der Taylorschen Reihe mit Restglied in Integralform offenbar gleichmäßig in u

$$2\pi m(\alpha+ti) - \varrho\tau(\alpha+ti) = (2\pi m\alpha - \varrho\tau(\alpha)) + ti(2\pi m - \varrho\tau'(\alpha)) + \frac{\varrho t^2}{2}\tau''(\alpha) + O(mt^3)$$

$$= (2\pi m\alpha - \varrho\tau(\alpha)) - \frac{\varrho m t^2}{\alpha^2+1} + O(m^{-1/5}),$$

ferner

$$\int_{-m^{-2/5}}^{+m^{-2/5}} e^{-\frac{\varrho m t^2}{\alpha^2+1}}\,dt = m^{-1/2}\int_{-m^{1/10}}^{+m^{1/10}} e^{-\frac{\varrho t^2}{\alpha^2+1}}\,dt \sim m^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\varrho t^2}{\alpha^2+1}}\,dt = \left(\frac{(\alpha^2+1)\pi}{m\varrho}\right)^{1/2},$$

folglich

$$\int_{-m^{-2/5}}^{+m^{-2/5}} e^{2\pi m(\alpha+ti)-\varrho\tau(\alpha+ti)}\,dt \sim \left(\frac{(\alpha^2+1)\,\pi}{m\varrho}\right)^{1/2} e^{2\pi m\alpha-\varrho\tau(\alpha)}.$$

Die Integrale über die beiden noch übrigen Intervalle liefern einen Beitrag von geringerer Größenordnung. Denn es ist

$$\tau(\alpha+ti)-\tau(\alpha)=\sum_{k=-m}^{+m}\log\frac{\alpha+ti+\frac{ki}{m}}{\alpha+\frac{ki}{m}}=\frac{1}{2}\sum_{k=-m}^{+m}\log\left(\frac{\alpha+ti+\frac{ki}{m}}{a+\frac{ki}{m}}\cdot\frac{a+ti-\frac{ki}{m}}{\alpha-\frac{ki}{m}}\right),$$

also

$$\Re(\tau(\alpha+ti)-\tau(\alpha))=\frac{1}{2}\sum_{k=-m}^{+m}\log\left|\frac{(\alpha+ti)^2+\frac{k^2}{m^2}}{\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}}\right|=\frac{1}{4}\sum_{k=-m}^{+m}\log\frac{\left(\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}-t^2\right)^2+4\alpha^2t^2}{\left(\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=-m}^{+m}\log\left(1+t^2\frac{2\left(\alpha^2-\frac{k^2}{m^2}\right)+t^2}{\left(\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}\right)^2}\right).$$

Weiter ist $k^2\leqq m^2$ und wegen der Annahme $\varrho\geqq 5$

$$\alpha=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{\varrho}\geqq\operatorname{cotg}\frac{\pi}{5}>1.$$

Also gibt es eine positive Konstante c, die weder von k, noch von m abhängt, so daß für jedes reelle t

$$\frac{2\left(\alpha^2-\frac{k^2}{m^2}\right)+t^2}{\left(\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}\right)}\geqq c$$

ist, folglich auch

$$\Re(\tau(\alpha+ti)-\tau(\alpha))\geqq\frac{2m+1}{4}\log(1+ct^2)$$

und demnach

$$\left|\left\{\int_{-\infty}^{-m^{-2/5}}+\int_{+m^{-2/5}}^{+\infty}\right\}e^{2\pi m(\alpha+ti)-\varrho\tau(\alpha+ti)}\,dt\right|\leqq 2e^{2\pi m\alpha-\varrho\tau(\alpha)}\int_{+m^{-2/5}}^{\infty}(1+ct^2)^{-\frac{2m+1}{4}}\,dt.$$

Das Integral rechts geht durch die Substitution

$$1+ct^2=(1+cm^{-4/5})\,x$$

über in den Ausdruck

$$\int_1^{\infty}\frac{(1+cm^{-4/5})^{-\frac{2m-3}{4}}\,x^{-\frac{2m+1}{4}}}{2\sqrt{c}\sqrt{(1+cm^{-4/5})\,x-1}}\,dx,$$

ist daher für $m\to\infty$ von geringerer Größenordnung als jede negative Potenz von m.

Damit ist folgende asymptotische Formel bewiesen:

$$R\left(2\pi i\,\middle|\,\begin{matrix}2m\\ \varrho\end{matrix}\right)\sim\frac{i^{2m\varrho+\varrho-1}}{2\pi m^{2m\varrho+\varrho-1}}\sqrt{\frac{(\alpha^2+1)\,\pi}{m\varrho}}\,e^{2\pi m\alpha-\varrho\tau(\alpha)};$$

sie läßt sich nach den früheren Abschätzungen überführen in

$$R\left(2\pi i \,\middle|\, \begin{matrix} 2m \\ \varrho \end{matrix}\right) \sim \frac{i^{2m\varrho+\varrho-1}\, e^{2m\varrho}\left(\sin\frac{\pi}{\varrho}\right)^{2m\varrho+\varrho-1}}{2\sqrt{\pi m\varrho}\; m^{2m\varrho+\varrho-1}}.$$

Bedeutet ε eine positive Zahl, so ist folglich für $m \geqq m_0(\varepsilon, \varrho)$

$$e^{-\varepsilon m}\left(2e\sin\frac{\pi}{\varrho}\right)^{2m\varrho} \leqq \left|r\binom{2m}{\varrho}\right| \leqq e^{+\varepsilon m}\left(2e\sin\frac{\pi}{\varrho}\right)^{2m\varrho}.$$

Diese Ungleichung läßt sich in ähnlicher Weise wie früher interpretieren. Sei zur Abkürzung

$$\Omega_1 = \Omega_0 + \eta, \qquad \Omega_2 = \Omega_0 - \eta,$$

$$\Omega_0 = \frac{\log\left\{\left(2e\sin\frac{\pi}{\varrho}\right)^{-1}\right\}}{\log(4e)}, \qquad \eta = \frac{\varepsilon}{2\varrho\log(4e)}.$$

Mit wachsendem ϱ streben Ω_1 und Ω_2 gegen Unendlich; ihre Differenz kann beliebig klein angenommen werden. *Wenn Ω eine beliebig große positive Zahl ist, so gibt es eine natürliche Zahl ϱ, für die*

$$\Omega_1 > \Omega_2 \geqq \Omega$$

ist; alsdann gehören zu jeder genügend großen natürlichen Zahl m je ϱ ganze rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{\varrho-1}$, so daß

$$\max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{\varrho-1}|) \leqq C^m, \qquad C = (4e)^{2\varrho}$$

und gleichzeitig

$$C^{-m\Omega_1} \leqq \left|\sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l\right| \leqq C^{-m\Omega_2}, \qquad z = 2\pi i$$

ist. Hierin ist speziell die Transzendenz von π enthalten.

20. Mittels einer allgemeinen Überlegung läßt sich aus den letzten Ergebnissen ableiten, daß weder der reelle Logarithmus einer positiven rationalen Zahl, noch die Zahl $2\pi i$, also auch nicht die Zahl π selbst, U-Zahlen sind.

Von der Zahl z werde angenommen, daß sich zu ihr eine natürliche Zahl ϱ, eine Zahl $C > 1$ und zwei positive Zahlen Ω_1 und Ω_2 mit $\Omega_1 > \Omega_2$ angeben lassen, daß zu jeder genügend großen natürlichen Zahl m dann ϱ ganze rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{\varrho-1}$ existieren, die den Ungleichungen

$$0 < \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{\varrho-1}|) \leqq C^m,$$

$$C^{-m\Omega_1} \leqq \left|\sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l\right| \leqq C^{-m\Omega_2}$$

genügen.

Sei dann q eine natürliche Zahl mit

$$q - 1 < \Omega_2,$$

so daß offenbar z nicht algebraisch von höchstens q-tem Grad ist. Eine beliebige Näherungsform

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \quad A = \max(|A_0|, |A_1|, \ldots |A_q|) \geqq 1$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten heiße primitiv, wenn die Nullstellen des Polynoms

$$A_0 + A_1 x + \cdots + A_q x^q$$

algebraische Zahlen genau vom Grad q sind. Es werde angenommen, daß zu einer gewissen positiven Zahl λ unendlichviele primitive Näherungsformen

$$R_k = A_{0k} + A_{1k}\,z + \cdots + A_{qk}z^q\,, \qquad A_k = \max\left(|A_{0k}|, |A_{1k}|, \ldots, |A_{qk}|\right) \geqq 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

als Lösung der Ungleichung

$$0 < |R_k| \leqq A_k^{-\lambda} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

existieren.

Sei in lineare Faktoren zerlegt:

$$A_{0k} + A_{1k}\,x + \cdots + A_{qk}\,x^q = A_{qk}\,(x - \zeta_k)\,(x - \zeta_k')\cdots(x - \zeta_k^{(q-1)})\,.$$

Unter den Zahlen $\zeta_k, \zeta_k', \ldots, \zeta_k^{(q-1)}$ gibt es eine, die möglichst nahe bei der Zahl z liegt; sie sei etwa gleich ζ_k. Dann ist gewiß

$$0 < |z - \zeta_k| \leqq A_k^{-\frac{\lambda}{q}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Jeder Näherungsform R_k mit großem k kann eine Näherungsform $\sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l$ zugeordnet werden durch die Bedingung

$$C^{m\vartheta} \leqq A_k \leqq C^{(m+1)\vartheta};$$

dabei bedeutet ϑ eine positive Konstante, über die später verfügt wird. Es werde gesetzt:

$$\sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l\,\zeta_k^{(\varkappa)l} = Z_k^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, q-1)\,.$$

Die Koeffizienten a_l sind nach Annahme ganz rational; ferner sind die Zahlen $\zeta_k, \zeta_k', \ldots, \zeta_k^{(q-1)}$ zueinander algebraisch konjugiert. Also sind auch die Zahlen $Z_k, Z_k', \ldots, Z_k^{(q-1)}$ zueinander algebraisch konjugiert; sie sind daher entweder alle zugleich Null oder zugleich von Null verschieden.

Sei jetzt k schon so groß, daß $|\zeta_k| \leqq 2|z|$ ist, und zur Abkürzung

$$c = 1 + 2\cdot|2z| + 3\cdot|2z|^2 + \cdots + (\varrho - 1)\cdot|2z|^{\varrho-2}.$$

Offenbar ist dann

$$\left|\int_z^{\zeta_k} (a_1 + 2a_2\,x + \cdots + (\varrho-1)\,a_{\varrho-1}x^{\varrho-2})\,dx\right| \leqq |z - \zeta_k|\cdot C^m \cdot c \leqq cC^{m\left(1-\frac{\lambda\vartheta}{q}\right)},$$

und wegen

$$(a_0 + a_1\,\zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1}\,\zeta_k^{\varrho-1}) - (a_0 + a_1\,z + \cdots + a_{\varrho-1}z^{\varrho-1}) = \int_z^{\zeta_k} (a_1 + 2a_2\,x + \cdots + (\varrho-1)\,a_{\varrho-1}x^{\varrho-2})\,dx$$

besteht die Ungleichung

$$|a_0 + a_1\,\zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1}\,\zeta_k^{\varrho-1}| \geqq C^{-m\Omega_1} - cC^{m\left(1-\frac{\lambda\vartheta}{q}\right)}.$$

Wenn

$$\Omega_1 < \frac{\lambda\vartheta}{q} - 1$$

ist, so wird daher für genügend großes k die rechte Seite von Null verschieden; dann ist somit gleichzeitig

$$Z_k^{(\varkappa)} \neq 0 \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, q-1)\,.$$

Das Produkt

$$P_k = A_{qk}^{q(\varrho-1)} \prod_{\varkappa=0}^{q-1} Z_k^{(\varkappa)}$$

ist folglich auch von Null verschieden, denn gewiß verschwindet A_{qk} nicht. Als symmetrische Funktion der $\zeta_k^{(\varkappa)}$ muß P_k rational sein; ferner ist P_k auch ganz, da der Nenner beseitigt ist. Also stellt P_k eine ganze und von Null verschiedene rationale Zahl dar, so daß sein Absolutbetrag mindestens Eins beträgt.

Die Zahlen $\zeta_k^{(\varkappa)}$ sind Wurzeln der Gleichung

$$A_{0k} + A_{1k}\, x + \cdots + A_{qk} x^q = 0;$$

für jede von ihnen ist daher

$$|\zeta_k^{(\varkappa)}|^q \leqq |A_{qk}\, \zeta_k^{(\varkappa)q}| \leqq A_k\{1 + |\zeta_k^{(\varkappa)}| + \cdots + |\zeta_k^{(\varkappa)}|^{q-1}\} = A_k \frac{|\zeta_k^{(\varkappa)}|^q - 1}{|\zeta_k^{(\varkappa)}| - 1},$$

also entweder $|\zeta_k^{(\varkappa)}| \leqq 1$ oder $|\zeta_k^{(\varkappa)}| \leqq A_k + 1$, d. h. es ist allgemein

$$|\zeta_k^{(\varkappa)}| \leqq A_k + 1 \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Also wird für genügend großes k

$$|Z_q^{(\varkappa)}| \leqq C^m \frac{(A_k+1)^\varrho - 1}{A_k} \leqq C^m \cdot 2^\varrho A_k^{\varrho-1} \leqq 2^\varrho C^{m+(\varrho-1)\vartheta(m+1)}$$

und endlich

$$|Z_k| \geqq \frac{1}{|A_{qk}|^{q(\varrho-1)} \prod_{\varkappa=1}^{q-1} |Z_k^{(\varkappa)}|} \geqq \frac{1}{C^{q(\varrho-1)\vartheta(m+1)}\, (2^\varrho C^{m+(\varrho-1)\vartheta(m+1)})^{q-1}}$$

oder

$$|a_0 + a_1\, \zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1}\, \zeta_k^{\varrho-1}| \geqq 2^{-\varrho(q-1)} C^{-\{m(q-1)+(2q-1)(\varrho-1)\vartheta(m+1)\}},$$

während andrerseits

$$|a_0 + a_1 z + \cdots + a_{\varrho-1} z^{\varrho-1}| \leqq C^{-m\Omega_2}$$

ist. Nach Annahme besteht aber die Ungleichung

$$q - 1 < \Omega_2.$$

Ohne Einschränkung darf daher auch angenommen werden, daß die Zahl ϑ der Ungleichung

$$q - 1 + (2q-1)(\varrho-1)\,\vartheta < \Omega_2$$

genügt. Dies ist der Fall, wenn ε eine kleine positive Konstante bedeutet und alsdann

$$\vartheta = \frac{\Omega_2 - q + 1}{(2q-1)(\varrho-1)(1+\varepsilon)}$$

gewählt wird. Dann wird für genügend großes k

$$|(a_0 + a_1\, \zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1}\, \zeta_k^{\varrho-1}) - (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{\varrho-1} z^{\varrho-1})|$$
$$\geqq 2^{-\varrho(q-1)} C^{-\{m(q-1)+(2q-1)(\varrho-1)\vartheta(m+1)\}} - C^{-m\Omega_2} \geqq C^{-m\Omega_2}$$

während andrerseits nach früherem

$$|(a_0 + a_1\, \zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1}\, \zeta_k^{\varrho-1}) - (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{\varrho-1} z^{\varrho-1})| \leqq c C^{-\left(\frac{\lambda\vartheta}{q}-1\right)m}$$

ist. Also muß von einem k ab, d. h. für gewisse beliebig große natürliche Zahlen m

$$C^{-m\Omega_2} \leqq c C^{-\left(\frac{\lambda\vartheta}{q}-1\right)m}$$

sein. Es war aber

$$\frac{\lambda\vartheta}{q} - 1 > \Omega_1$$

vorausgesetzt; wegen $\Omega_1 > \Omega_2$ ist daher erst recht

$$\frac{\lambda\vartheta}{q} - 1 > \Omega_2,$$

und man kommt zu einem Widerspruch.

Die beiden Ungleichungen

$$\frac{\lambda\vartheta}{q} - 1 > \Omega_1,$$
$$q - 1 + (2q-1)(\varrho - 1)\vartheta < \Omega_2.$$

können also nicht gleichzeitig erfüllt sein. Die zweite durfte ohne Einschränkung durch die Wahl

$$\vartheta = \frac{\Omega_2 - q + 1}{(2q-1)(\varrho-1)(1+\varepsilon)}$$

befriedigt werden. Also darf die erste Ungleichung nicht gelten, so daß

$$\lambda \leqq \frac{q(2q-1)(\varrho-1)(\Omega_1+1)}{\Omega_2 - q + 1}(1+\varepsilon)$$

sein muß. Damit ist gezeigt:

Wenn λ der Ungleichung

$$\lambda > \frac{q(2q-1)(\varrho-1)(\Omega_1+1)}{\Omega_2 - q + 1}$$

genügt, so genügen die primitiven Näherungsformen

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \quad A = \max(|A_0|, |A_1|, \ldots, |A_q|) \geqq 1$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten und genügend großem A der Ungleichung

$$|R| \geqq A^{-\lambda}.$$

Man kann dies auch so ausdrücken, daß *alle* primitiven Näherungsformen mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht gleichzeitig verschwinden, der Ungleichung

$$|R| \geqq \Lambda A^{-\lambda}$$

genügen, wo die positive Konstante Λ wohl von λ, nicht aber von den Koeffizienten von R abhängt.

21. Auch für beliebige Näherungen q-ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, kann für $q - 1 < \Omega_2$ eine untere Schranke hergeleitet werden. Sei die Zerlegung von

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \quad A = \max(|A_0|, |A_1|, \ldots, |A_q|) \geqq 1$$

in primitive Faktoren gegeben durch

$$R = \prod_{\tau=1}^{p} R^{(\tau)}, \qquad R^{(\tau)} = \sum_{k=0}^{q_\tau} A_k^{(\tau)} z^k,$$

und möge

$$A^{(\tau)} = \max(|A_0^{(\tau)}|, |A_1^{(\tau)}|, \ldots, |A_{q_\tau}^{(\tau)}|) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p),$$

sein; die Zahlen

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(p)}$$

sind gewiß alle mindestens gleich 1. Nach einem Hilfssatz von Siegel genügen sie den Ungleichungen [4])

$$A^{(\tau)} \leqq c\,A\,, \quad c = q! \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p).$$

Sind jetzt $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(p)}$ p positive Zahlen mit

$$\lambda^{(\tau)} > \frac{q^{(\tau)}\,(2q^{(\tau)} - 1)\,(\varrho - 1)\,(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q^{(\tau)} + 1} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p)$$

und bedeuten ferner $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \ldots, \Lambda^{(p)}$ gewisse positive Konstante, die einzeln wohl von $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(p)}$, nicht aber von den Koeffizienten der Formen $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(p)}$ und R abhängen, so ist

$$|R^{(\tau)}| \geqq \Lambda^{(\tau)}\,A^{(\tau)-\lambda^{(\tau)}} \geqq c^{-\lambda^{(\tau)}}\,\Lambda^{(\tau)}\,A^{-\lambda^{(\tau)}} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p)$$

und daher

$$|R| \geqq \Lambda_0\,A^{-\lambda^{(1)}-\lambda^{(2)}-\cdots-\lambda^{(p)}},$$

wo die positive Konstante Λ_0 wohl von den Zahlen $\lambda^{(\tau)}$, nicht aber von den Koeffizienten der Näherungsform R abhängt.

Sei zunächst R genau vom Grad q in z angenommen, also

$$\sum_{\tau=1}^{p} q^{(\tau)} = q\,.$$

Dann ist auch

$$\sum_{\tau=1}^{p} q^{(\tau)^2} \leqq q^2$$

und folglich

$$\sum_{\tau=1}^{p} q^{(\tau)}\,(2q^{(\tau)} - 1) = 2\sum_{\tau=1}^{p} q^{(\tau)^2} - q \leqq 2q^2 - q = q\,(2q - 1).$$

Somit besteht die Ungleichung

$$\sum_{\tau=1}^{p} \frac{q^{(\tau)}\,(2q^{(\tau)} - 1)\,(\varrho - 1)\,(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q^{(\tau)} + 1} \leqq \sum_{\tau=1}^{p} \frac{q^{(\tau)}\,(2q^{(\tau)} - 1)\,(\varrho - 1)\,(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q + 1}$$
$$\leqq \frac{q(2q - 1)\,(\varrho - 1)\,(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q + 1}.$$

Weil die rechte Seite mit abnehmendem q selbst abnimmt, so muß diese Ungleichung bestehen bleiben, wenn die Form R nur noch höchstens vom Grad q ist. Ist folglich λ eine beliebige positive Zahl größer als

$$\frac{q\,(2q - 1)\,(\varrho - 1)\,(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q + 1},$$

so kann sie immer in der Form

$$\lambda = \sum_{\tau=1}^{p} \lambda^{(\tau)}, \qquad \lambda^{(\tau)} > \frac{q^{(\tau)}\,(2q^{(\tau)} - 1)\,(\varrho - 1)\,(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q^{(\tau)} + 1} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p)$$

zerlegt werden.

Damit ist folgender Satz bewiesen [5]):

---

[4]) Siehe die Arbeit: C. Siegel, Approximation algebraischer Zahlen, Math. Zeitschr. **10** (1921), S. 176, Hilfssatz III.

[5]) Nach einer Mitteilung von Herrn Siegel läßt sich für λ_0 ein besserer Wert mittels eines anderen Beweisansatzes erhalten. Für die Zwecke der vorliegenden Arbeit genügt jedoch Satz 4.

Satz 4. *Von der Zahl z werde angenommen, daß sich zu ihr eine natürliche Zahl ϱ, eine Zahl $C > 1$ und zwei positive Zahlen Ω_1 und Ω_2 mit $\Omega_1 > \Omega_2$ angeben lassen, daß zu jeder genügend großen natürlichen Zahl m dann ϱ ganze rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{\varrho-1}$ existieren, die den Ungleichungen*

$$0 < \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{\varrho-1}|) \leqq C^m,$$

$$C^{-m\Omega_1} \leqq \left| \sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l \right| \leqq C^{-m\Omega_1}$$

genügen. Wenn alsdann die positive Zahl λ_0 der Ungleichung

$$\lambda_0 > \frac{q(2q-1)(\varrho-1)(\Omega_1+1)}{\Omega_2 - q + 1}$$

genügt, so läßt sich zu ihr eine positive Konstante Λ_0 angeben, so daß jede Näherungsform

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \qquad A = \max(|A_0|, |A_1|, \ldots, |A_q|) \geqq 1$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht gleichzeitig verschwinden, und die von einem Grad

$$q < \Omega_2 + 1$$

ist, der Ungleichung

$$|R| \geqq \Lambda_0 A^{-\lambda_0}$$

genügt.

Nach den Definitionen in 1. ist also speziell

$$\mu(z) \geqq \Omega_2 + 1 .$$

22. Satz 4 werde nun auf den reellen Logarithmus $\log \zeta$ positiver rationaler Zahlen und auf die Zahl $2\pi i$ angewandt. Da in beiden Fällen Ω_2 beliebig groß sein kann, so handelt es sich keinmal um U-Zahlen, sondern $\log \zeta$ und $2\pi i$ müssen entweder S-Zahlen oder T-Zahlen sein; insbesondere kann also zwischen ihnen und einer Liouville-Zahl keine algebraische Gleichung mit algebraischen Koeffizienten bestehen. Darüber hinaus lassen sich untere Schranken für die Annäherungen an beide Zahlen angeben:

In beiden Fällen waren Ω_1 und Ω_2 als Funktion von ϱ in der Form

$$\Omega_1 = a \log \varrho + O(1), \qquad \Omega_2 = a \log \varrho + O(1)$$

darstellbar, wo a eine gewisse positive Zahl bedeutet. Zu der gegebenen natürlichen Zahl q kann eine natürliche Zahl ϱ so bestimmt werden, daß

$$\Omega_2 - 1 \leqq q < \Omega_2$$

und folglich

$$\Omega_2 - q + 1 > 1$$

ist. Dann wird

$$\varrho = O(e^{\frac{q}{a}})$$

und

$$\frac{q(2q-1)(\varrho-1)(\Omega_1+1)}{\Omega_2 - q + 1} = O(q^3 e^{\frac{q}{a}}) .$$

Es gibt also eine positive Konstante $c > 1$, so daß für alle q

$$\lambda_0 \leqq c^q$$

angenommen werden kann; damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 5. *Bedeute $z \neq 0$ entweder den reellen Logarithmus einer positiven rationalen Zahl oder die Zahl $2\pi i$. Dann gibt es hierzu eine positive Konstante $c > 1$ und zu jeder natürlichen Zahl q eine weitere positive Konstante $C(q)$, so daß jede Näherungsform*

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \quad A = \max(|A_0|, |A_1|, \ldots, |A_q|) \geqq 1$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, der Ungleichung

$$|R| \geqq C(q)\, A^{-c^q}$$

genügt.

Eine ganz entsprechende Ungleichung muß auch noch gelten, wenn statt $2\pi i$ die Zahl π selbst genommen wird, wie sofort aus 2. folgt. Ferner lassen sich entsprechende Ungleichungen für die Logarithmen aller algebraischen Zahlen aufstellen.

Die Ungleichung in Satz 5 kann noch etwas verschärft werden. So z. B. kann bei $z = 2\pi i$ gezeigt werden, daß die Zahl c für genügend großes q mit einer beliebigen Zahl größer als $2e$ gleichgesetzt werden darf.

Göttingen, 15. November 1930.

Eingegangen 5. Januar 1931.

Über Stützstreckenverteilung und Zerlegung konvexer Figuren in konvexe Teilfiguren ohne geradlinige Begrenzungsteile.

Von *Boris Kaufmann* in Heidelberg.

Inhaltsverzeichnis.

			Seite
Einleitung			151
I. Teil.	§ 1.	Die Konstrukion der Stützstrecken	152
	§ 2.	Kurven und Begrenzungslinien mit überall dicht liegenden Stützstrecken	155
	§ 3.	Der fragliche Ausnahmefall	157
II. Teil.	§ 4.	Die Zerlegung konvexer Figuren in konvexe Teilfiguren	160

Einleitung.

In einer in diesem Journal erschienen Abhandlung [1]) untersuchte ich die Verteilung der Stützstrecken auf Jordanbereichen und die dadurch bedingten gestaltlichen Eigenschaften der Jordankurven. Es war naturgemäß, diese Frage in bezug auf allgemeinere bzw. allgemeinste Bereiche zu stellen. Will man darüber Aufschluß gewinnen, so ist es naheliegend, zunächst nach der Bestimmbarkeit und Existenz der Stützstrecken „im kleinen", d. h. in beliebig kleinen Umgebungen der Randstellen zu fragen. Aus den einfachen Verfahren, welche wir für die Bestimmung der Stützstrecken unter sehr allgemeinen Voraussetzungen ausbilden, ergeben sich sofort neue Resultate über die Verteilung der Stützstrecken. — So können wir zeigen, daß die Stützstrecken, wie bei den Jordankurven, auch auf beliebigen geschlossenen (Schönflies-)Kurven überall dicht liegen. — Allgemein liegen die Stützstrecken immer überall dicht, falls die Begrenzung des Bereiches keine geradlinigen Stücke enthält. — Auf geschlossenen Kurven ohne geradlinige Stücke bzw. ohne frei liegende konvexe Kurvenbögen gibt es gleichzeitig innere und äußere Stützstrecken überall dicht.

Indes tritt ein bemerkenswerter Sonderfall solcher Begrenzungen hervor, auf welchen die einfachen Verfahren zur Bestimmung der Stützstrecken versagen. Dies ist bei solchen Begrenzungen der Fall, deren sämtliche Punkte innerhalb eines offenen Teils der Ebene auf nicht freiliegenden geradlinigen Begrenzungsteilen liegen und welche wir Gratrandmengen nennen.

Gibt es aber Begrenzungen ohne Stützstrecken relativ zu einer Umgebung? (Jedenfalls müßten dies Gratrandmengen sein.) Die Möglichkeit dieses Ausnahmefalls hängt unmittelbar von der Lösung eines auch an sich interessanten geometrischen Problems ab, der Zerlegung ebener Figuren in konvexe Teilfiguren, welche keine geradlinigen Begrenzungsstücke enthalten und die Peripherie der gegegebenen Figur treffen.

[1]) Über die Konvexitäts- und Konkavitätsstellen auf Jordankurven, dieses Journal **164** (1931), S. 112—127.

Daß die Lösung dieses Problems die Entscheidung über den fraglichen Ausnahmefall bringt, ergibt sich aus einem von den Herren Leja und Wilcocz bzw. Tietze bewiesenen Satz, wonach nicht konvexe Bereiche mindestens eine Konkavitätsstelle besitzen.

Das zuletzt gestellte Problem beantworten wir im bejahenden Sinne, indem wir die fragliche Zerlegung ebener Figuren durchführen und somit auch die Möglichkeit des Ausnahmefalls, nämlich der Begrenzungen ohne überall dicht liegende Stützstrecken nachweisen.

Im übrigen stellt das gelöste Zerlegungsproblem nur den einzigen in der Ebene möglichen Fall aus einem Problemkreis dar, welcher in den höherdimensionalen kartesischen Räumen weitere bis jetzt ungelöste und mit wachsender Dimensionszahl immer zahlreicher werdende Probleme der Zerlegung räumlicher Körper in konvexe Teilkörper einschließt (vgl. auch die Schlußbetrachtung dieser Abhandlung).

I. Teil.

§ 1. Die Bestimmung der Stützstrecken.

1. Es sei S die (nicht leere) Berandung eines beliebigen ebenen Bereiches $\mathfrak{B}$ und R eine beliebige Randstelle von $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{U}(R)$ sei eine beliebige Kreisumgebung der Stelle R mit dem Radius r. Die Konstruktion einer Stützstrecke von $\mathfrak{B}$ innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ läßt sich auf die Bestimmung eines gewissen von einer einschließenden Kurve [2]) begrenzten abgeschlossenen Jordanbereiches $\mathfrak{H}^0$ innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ zurückführen. Die Begrenzungslinie H von $\mathfrak{H}$ nennen wir dabei eine einschließende Kurve, wenn auf ihr mindestens ein geradliniges Stück $\overline{AB}$ liegt, wobei der zu $\overline{AB}$ komplementäre Bogen $L_{A,B}$ der Kurve ganz innerhalb oder ganz außerhalb $\mathfrak{B}$ verläuft und $\mathfrak{H}^0$ mindestens einen von A und B verschiedenen Punkt der Begrenzung S von $\mathfrak{B}$ enthält. Je nachdem $L_{A,B}$ innerhalb oder außerhalb $\mathfrak{B}$ verläuft, nennen wir H eine innere oder eine äußere einschließende Kurve des Bereiches $\mathfrak{B}$. Diese ermöglicht uns die Bestimmung einer inneren oder einer äußeren Stützstrecke von $\mathfrak{B}$ auf einem zu $\overline{AB}$ parallelen Geradenintervall innerhalb $\mathfrak{H}^0$.

2. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}(S)$ die zu S komplementäre offene Menge in der Ebene und mit $\mathfrak{U}'(R)$ die Kreisumgebung der Randstelle R mit einem Radius $r' = \frac{r}{2}$, so lassen sich je nach Beschaffenheit und Anzahl der Komponenten der Durchschnitte $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ bzw. $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}(R)$ folgende einfache Konstruktionsverfahren der einschließenden Kurven innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ ausbilden.

I. Fall einer einzigen Komponente mit erreichbaren Randpunkten. Angenommen, sämtliche Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}'(R)$ sind in einer einzigen Komponenten $\mathfrak{h}$ des Durchschnittes $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ enthalten, wobei sämtliche Randpunkte von $\mathfrak{h}$ erreichbar sind.

Es sei $\overline{AB}^0$ eine ganz innerhalb $\mathfrak{U}'(R)$ liegende Strecke mit dem Mittelpunkt in R. Die Endpunkte A und B der Strecke verbinden wir durch einen Weg $L_{A,B}$, welcher (von den Endpunkten abgesehen) ganz in $\mathfrak{h}$ verläuft. Wegen der Erreichbarkeit der Randpunkte von $\mathfrak{h}$ ist eine solche Verbindung immer möglich. Diejenige Teilstrecke von $\overline{AB}$, welche eine Komponente der Menge $(\overline{AB} - \overline{AB} \cdot L_{A,B})$ ist und den Punkt R enthält, zerlegt die Komplementärmenge $\mathfrak{C}(L_{A,B})$ des Bogens $L_{A,B}$ in zwei Bereiche,

[2]) Vgl. die unter [1]) zitierte Abhandlung (§ 1).

von welchen der beschränkte von einer inneren einschließenden Kurve des Gebietes $\mathfrak{B}$ begrenzt wird.

II. Fall zweier Komponenten mit mindestens zwei gemeinsamen erreichbaren Randpunkten. Wir nehmen jetzt an, der Durchschnitt $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ enthält mindestens zwei verschiedene Komponenten $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$, wobei der Durchschnitt $\mathfrak{h}_1^0 \cdot \mathfrak{h}_2^0$ innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ mindestens zwei verschiedene in bezug auf beide Komponenten $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ erreichbare Punkte enthält. Es seien dies etwa die beiden Punkte A und B. Diese beiden Punkte verbinden wir durch die Strecke $\overline{AB}$ und durch je einen (mit Ausnahme der Endpunkte) ganz im Innern von $\mathfrak{h}_1$ bzw. $\mathfrak{h}_2$ verlaufenden Jordanbogen $L'_{A,B}$ und $L''_{A,B}$. Trifft $\overline{AB}$ mindestens das eine der beiden Gebiete $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$, z. B. $\mathfrak{h}_1$ in einem Punkt O, so zerlegt die O enthaltende Teilstrecke und Komponente von $(\overline{AB}^0 - \overline{AB}^0 \cdot L''_{A,B})$ das zu $L''_{A,B}$ komplementäre Gebiet $\mathfrak{C}(L''_{A,B})$ in zwei Bereiche. Der beschränkte dieser beiden ist ein von einer einschließenden Kurve begrenzter Jordanbereich. Im Falle, daß $\overline{AB}$ weder $\mathfrak{h}_1$ noch $\mathfrak{h}_2$ trifft, sind

$$\overline{AB}^0 + L'_{A,B}$$

und

$$\overline{AB}^0 + L''_{A,B}$$

einschließende Kurven des Bereiches $\mathfrak{B}$.

Wir heben hier noch hervor, daß dieses Verfahren unter sehr allgemeinen Bedingungen anwendbar ist. — Sind sämtliche Komponenten von $\mathfrak{U}'(R) \cdot \mathfrak{C}(S)$ in der Vereinigung endlich vieler und mindestens zweier Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{U}(R) \cdot \mathfrak{C}(S)$ mit lauter erreichbaren Randpunkten enthalten, so ist, wie leicht gezeigt werden kann, das obige Verfahren immer anwendbar. Es genügt aber schon vorauszusetzen, daß sämtliche Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{U}'(R) \cdot \mathfrak{C}(S)$ in der Vereinigung beliebig vieler und mindestens zweier Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{U}(R) \cdot \mathfrak{C}(S)$ mit nur erreichbaren Randpunkten enthalten sind, falls nur sämtliche Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}'(R)$ in der Vereinigung endlich vieler Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}(R)$ mit erreichbaren Randpunkten enthalten sind. Dieser letzte Fall ist für unsere Betrachtungen (§ 3) wesentlich.

III. Fall mindestens einer Komponente mit nicht erreichbaren Randpunkten. Wir setzen jetzt die Existenz einer Komponenten $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ mit mindestens einem in bezug auf $\mathfrak{h}$ nicht erreichbaren Randpunkt Q innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ voraus. Wir überzeugen uns leicht, daß für eine hinreichend kleine Kreisumgebung $\mathfrak{U}(Q)$ in $\mathfrak{U}(R)$ der Durchschnitt $\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{U}(R)$ mindestens zwei (sogar unendlich viele) Komponenten enthält. Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir eine Folge ineinandergeschachtelter sich auf den Punkt Q zusammenziehender Teilgebiete von $\mathfrak{h}$ bestimmen, was uns die Konstruktion eines Einschnittes des Gebietes $\mathfrak{h}$ mit dem Endpunkt in Q ermöglichen würde. — Es seien $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ zwei verschiedene Komponenten von $\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{U}(Q)$. $\overline{AB}$ sei die Verbindungsstrecke zweier Punkte A in $\mathfrak{h}_1$ und B in $\mathfrak{h}_2$. Diese Strecke trifft jedenfalls einen Punkt P von S. Wir verbinden A und B durch einen ganz in $\mathfrak{h}$ verlaufenden Jordanbogen $L_{A,B}$. Eine den Punkt P enthaltende Teilstrecke von $\overline{AB}$ zerlegt das zu $L_{A,B}$ komplementäre Gebiet in zwei Bereiche, von welchen der beschränkte von einer einschließenden Kurve begrenzt ist.

IV. Fall unendlich vieler Komponenten. Wir setzen jetzt die Existenz einer Teilgesamtheit $\mathfrak{M}(\mathfrak{h})$ unendlichvieler Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ voraus, wobei das Grenzgebilde einer jeden Folge von Komponenten der Ge-

samtheit $\mathfrak{M}(\mathfrak{h})$ weder ein Punkt ist noch ganz auf der Begrenzung der Umgebung $\mathfrak{U}(R)$ liegt. — Dieser sehr allgemeine Fall tritt immer ein, wenn in der (hinreichend kleinen) Umgebung von R nicht erreichbare oder bereits nur nicht allseitig erreichbare Randpunkte auftreten. Diese Voraussetzung ist auch von der im Fall III gemachten verschieden, insofern ein nicht erreichbarer Punkt innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ nicht notwendig Randpunkt einer Komponente von $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ sein muß.

Wir schränken allerdings die gemachte Voraussetzung durch die Nebenbedingung ein, wonach mindestens ein Häufungspunkt $\mathfrak{X}$ unendlich vieler Komponenten der Gesamtheit $\mathfrak{M}(\mathfrak{h})$ *auf keinem geradlinigen Begrenzungsstück von S liegen soll*[3]).

Wir können jetzt eine gegen $\mathfrak{X}$ konvergierende Punktfolge

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n, \ldots$$

so auswählen, daß jeder Punkt $\mathfrak{x}_n$ in einem Gebiet $\mathfrak{h}_n$ der Gesamtheit $\mathfrak{M}(\mathfrak{h})$ enthalten ist, wobei zwei verschiedene Punkte der Folge in zwei verschiedenen Gebieten der Gesamtheit $\mathfrak{M}(\mathfrak{h})$ liegen. Außerdem mögen die Durchmesser sämtlicher Gebiete $\mathfrak{h}_n >$ einer hinreichend kleinen positiven Größe δ sein. Eine solche geeignete Gebietsfolge ist wegen der in bezug auf die Grenzgebilde der Gebietsfolgen aus $\mathfrak{M}(\mathfrak{h})$ gemachten Voraussetzung in $\mathfrak{M}(\mathfrak{h})$ immer enthalten.

Wir verbinden jetzt den Punkt $\mathfrak{x}_n$ für jedes $n = 1, 2, \ldots$ durch eine Strecke $\overline{\mathfrak{x}_n \mathfrak{y}_n}$ mit einem Punkt $\mathfrak{y}_n$ innerhalb $\mathfrak{h}_n$, dessen Entfernung von $\mathfrak{x}_n \geqq \delta$ ist. Einen solchen geeigneten Punkt $\mathfrak{y}_n$ gibt es für jedes n. Es sei

$$\overline{\mathfrak{x}_1^* \mathfrak{y}_1^*}, \quad \overline{\mathfrak{x}_2^* \mathfrak{y}_2^*}, \ldots, \overline{\mathfrak{x}_n^* \mathfrak{y}_n^*}, \ldots$$

eine gegen eine Strecke $\overline{\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}}$ konvergierende Teilfolge der Streckenfolge

$$\overline{\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1}, \quad \overline{\mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_2}, \ldots, \overline{\mathfrak{x}_n \mathfrak{y}_n}, \ldots$$

Entsprechend sei $\mathfrak{h}_n^*$ das das Punktepaar $\mathfrak{x}_n^*, \mathfrak{y}_n^*$ enthaltende Gebiet der Folge $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_n, \ldots$ Für die Konstruktion der einschließenden Kurven ist es wesentlich, daß von einem ersten hinreichend großen $n = n_0$ ab die Strecke $\overline{\mathfrak{x}_n^* \mathfrak{y}_n^*}$ nicht ganz im Bereich $\mathfrak{h}_n^{*0}$ liegen kann. Wäre dies nicht der Fall, so müßte die Strecke $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$ im Grenzgebilde der Gebietsfolge $\mathfrak{h}_1^*, \mathfrak{h}_2^*, \ldots, \mathfrak{h}_n^*, \ldots$ enthalten sein. Da dieses Grenzgebilde auf S liegt, so müßte $\mathfrak{X}$ in Widerspruch zu unserer Voraussetzung auf einem geradlinigen Teil von S liegen. — Für ein beliebiges $n_1 > n_0$ sei O_{n_1} ein außerhalb $\mathfrak{h}_{n_1}^{*0}$ liegender Punkt der Strecke $\overline{\mathfrak{x}_{n_1}^* \mathfrak{y}_{n_1}^*}$. Wir verbinden $\mathfrak{x}_{n_1}^*$ und $\mathfrak{y}_{n_1}^*$ durch einen ganz in $\mathfrak{h}_{n_1}^*$ verlaufenden Jordanbogen $L_{\mathfrak{x}_{n_1}^*, \mathfrak{y}_{n_1}^*}$. Die O_{n_1} enthaltende Komponente von $\overline{\mathfrak{x}_{n_1}^* \mathfrak{y}_{n_1}^*} \cdot \mathfrak{C}(L_{\mathfrak{x}_{n_1}^*, \mathfrak{y}_{n_1}^*})$ zerlegt das Gebiet $\mathfrak{C}(L_{\mathfrak{x}_{n_1}^*, \mathfrak{y}_{n_1}^*})$ in zwei Bereiche, von welchen der beschränkte von einer einschließenden Kurve begrenzt wird. Es gibt danach zu jeder Strecke $\overline{\mathfrak{x}_n^* \mathfrak{y}_n^*}$ $(n > n_0)$ eine paralelle Stützstrecke innerhalb $\mathfrak{U}(R)$.

Anmerkung. Wir wollen hier noch einen besonders einfachen Fall erwähnen, in dem eine Stützstrecke innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ direkt bestimmt werden kann, nämlich unter der Voraussetzung, daß eine geradlinige Strecke $\overline{R_1 R_2}$ auf der Berandung einer und derselben Komponente $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ liegt und mindestens zwei erreichbare Punkte von $\mathfrak{h}$ enthält. Ein die beiden erreichbaren Punkte auf $\overline{R_1 R_2}$ verbindender (von den Endpunkten abgesehen) ganz innerhalb $\mathfrak{h}$ verlaufender Jordanbogen wird durch eine Teilstrecke von $\overline{R_1 R_2}$ zu einer einschließenden Kurve ergänzt.

[3]) Die volle Bedeutung dieser Einschränkung wird erst später hervortreten.

§ 2. Kurven und Begrenzungslinien mit überall dicht liegenden Stützstrecken.

3. Es sei $\mathfrak{U}(R)$ eine beliebig kleine Kreisumgebung eines Punktes R der Begrenzungslinie S eines Bereiches $\mathfrak{B}$ mit dem Radius r, in welcher $\mathfrak{B}$ nicht ganz enthalten ist. $\mathfrak{U}'(R)$ sei die Kreisumgebung von R mit dem Radius $\frac{r}{2}$. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{v})$ sei die Gesamtheit der $\mathfrak{U}'(R)$ treffenden Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$, wobei wir mit $\mathfrak{C}(S)$ die zu S komplementäre offene Menge in der Ebene bezeichnen. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{v})$ sei die Teilgesamtheit von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{v})$ aller $\mathfrak{U}'(R)$ treffenden Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}(R)$.

Wir weisen jetzt die folgende bereits im vorigen Paragraphen erwähnte Behauptung nach: Sind sämtliche Randpunkte aller Komponenten der Gesamtheit $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{v})$ innerhalb $\mathfrak{U}'(R)$ erreichbar und enthält $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{v})$ beliebig viele und mindestens zwei, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{v})$ hingegen nur endlich viele Komponenten, so gibt es ein Paar verschiedener Komponenten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{v})$ mit der Eigenschaft, daß die Berandungen von $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ mindestens zwei verschiedene Punkte innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ gemeinsam haben.

Da $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{v})$ nur endlich viele Komponenten enthält, so ist ein jeder Punkt von S innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ ein Randpunkt mindestens einer Komponente von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{v})$. Ist insbesondere $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{v}) \equiv \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{v})$, so enthält $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{v})$ mindestens zwei verschiedene Komponenten. Da andererseits $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{v})$ endlich viele Komponenten enthält, so muß ein gewisses Paar dieser Komponenten mindestens zwei gemeinsame Randpunkte innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ enthalten.

Wir nehmen jetzt an, die Voraussetzungen der Verfahren I, II und III (§ 1) seien in bezug auf die Umgebungen $\mathfrak{U}(R)$ und $\mathfrak{U}'(R)$ nicht erfüllt. Aus dieser Annahme und der zuletzt bewiesenen Behauptung kann gefolgert werden, daß $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{v})$ unendlich viele $\mathfrak{U}'(R)$ treffende Komponenten enthält. Dieses Ergebnis besagt aber, daß innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ eine Stützstrecke nach dem Verfahren IV konstruiert werden kann, falls innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ auf S keine geradlinigen Teile liegen. Aus dieser Betrachtung ergibt sich das Resultat:

In einer beliebig kleinen Umgebung eines Randpunktes von $\mathfrak{B}$, in welcher *keine geradlinigen Randstücke liegen*, lassen sich Stützstrecken mindestens nach einem der Verfahren I—IV (§ 1) konstruieren. — Es gilt danach der folgende Satz:

Enthält die Berandung S eines beliebigen ebenen Bereiches $\mathfrak{B}$ keine geradlinigen Teile, so liegt die Vereinigungsmenge aller Konvexitäts- und Konkavitätsstellen des Bereiches $\mathfrak{B}$ auf S überall dicht.

4. Fragen wir weiterhin nach Bereichen, auf welchen die Stützstrecken überall dicht liegen, so müssen in erster Linie die *Jordanbereiche* erwähnt werden. Die Stützstrecken können in diesem Fall immer nach dem Verfahren II bestimmt werden.

Zu solchen Bereichen gehören weiterhin solche (von beliebig hohem Zusammenhang), *deren sämtliche Randpunkte erreichbar sind.*

Wären nämlich für irgendeine Umgebung $\mathfrak{U}(R)$ eines Randpunktes R eines solchen Bereiches $\mathfrak{B}$ die Voraussetzungen keines der Verfahren I—IV (§ 1) erfüllt, so gäbe es in $\mathfrak{U}(R)$ mindestens eine geradlinige Strecke t auf der Begrenzung des Bereiches $\mathfrak{B}$. Jeder Punkt von t muß für mindestens eine Komponente des Durchschnittes $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}(R)$ erreichbar sein. Danach gibt es auch Paare verschiedener erreichbarer Punkte von t auf der Berandung einer und derselben Komponente von $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}(R)$. Daraus folgt unmittelbar (vgl. Anmerkung am Ende des § 1) die Existenz einer zu t parallelen Stützstrecke in $\mathfrak{U}(R)$.

5. Von besonderem Interesse sind die entsprechenden Verhältnisse auf den *geschlossenen* (Schönflies-)*Kurven*. — Es sei S eine Schönflieskurve, die ein beschränktes Gebiet $\mathfrak{B}$ und ein unbeschränktes Gebiet $\mathfrak{B}^*$ begrenzt.

Liegt auf S ein Jordanbogen J_{P_1,P_2} mit den Endpunkten P_1 und P_2 und ist $J_{P_1',P_2'}$ ein echter Teilbogen von J_{P_1,P_2}, so nennen wir $J_{P_1',P_2'}$ einen *freien Jordanbogen* der Schönflieskurve, falls in einer jeden hinreichend kleinen Umgebung eines jeden Punktes des Bogens $J_{P_1',P_2'}$ nur solche Punkte der Kurve S liegen, die dem Bogen J_{P_1,P_2} angehören.

Die Anwendbarkeit der Verfahren I—IV (§ 1) zur Bestimmung der Stützstrecken (unter den entsprechenden Voraussetzungen) ergibt sich aus den folgenden beiden Eigenschaften der Schönflieskurve, die wir hier ohne Beweis bringen [4]).

Sind sämtliche Punkte der Schönflieskurve S innerhalb einer Umgebung eines Kurvenpunktes P in bezug auf beide von S begrenzten Gebiete $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ allseitig erreichbar, so liegt P auf einem freien Jordanbogen der Kurve.

Jeder nicht auf einem freien Jordanbogen der Schönflieskurve S liegende Kurvenpunkt ist immer ein Häufungspunkt je einer Folge nicht allseitig erreichbarer Randpunkte der beiden von S begrenzten Bereiche.

In bezug auf die Stützstrecken eines freien Jordanbogens der Schönflieskurve gelten dieselben Betrachtungen wie im Falle eines Bogens einer einfachen Kurve.

Wir betrachten jetzt den Fall eines nicht auf einem freien Jordanbogen liegenden Kurvenpunktes P. Es sei $\mathfrak{U}(P)$ eine noch so kleine Umgebung des Punktes P. Innerhalb $\mathfrak{U}(P)$ sei R ein nicht allseitig erreichbarer Kurvenpunkt in bezug auf das Gebiet $\mathfrak{B}$ und R^* ein nicht allseitig erreichbarer Kurvenpunkt in bezug auf $\mathfrak{B}^*$. Mit $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}^{*\prime}$ bezeichnen wir die entsprechenden Teilgebiete von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$, für welche R und R^* nicht erreichbar sind. Wir überzeugen uns leicht, daß hinreichend kleine Umgebungen $\mathfrak{U}(R)$ und $\mathfrak{U}(R^*)$ der Punkte R und R^* die Eigenschaft besitzen, wonach unendlich viele Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{U}(R) \cdot \mathfrak{B}'$ bzw. unendlich viele Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{U}(R^*) \cdot \mathfrak{B}^{*\prime}$ gegen solche Grenzgebilde konvergieren, welche nicht ganz auf den Begrenzungen von $\mathfrak{U}(R)$ und $\mathfrak{U}(R^*)$ liegen.

Um dies für einen der beiden Punkte, etwa für R einzusehen, betrachten wir eine Folge $\{\mathfrak{U}_n(R)\}$ ineinandergeschachtelter Umgebungen von R, welche sich auf den Punkt R zusammenziehen. Gilt unsere Behauptung nicht, so liegt R für jedes n auf der Begrenzung mindestens einer Komponente von $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}_n(R)$. Darnach muß eine Folge ineinandergeschachtelter, gegen R konvergierender Teilgebiete von $\mathfrak{B}$ existieren, was uns die Konstruktion eines Einschnittes des Gebietes $\mathfrak{B}$ mit einem Endpunkt in R ermöglicht. — Eine ganz entsprechende Betrachtung gilt auch für R^*.

Somit ist gezeigt, daß in einer noch so kleinen Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ eines nicht auf einem freien Jordanbogen liegenden Punktes P einer geschlossenen Kurve, in welcher keine geradlinigen Kurvenstücke liegen, nach dem Verfahren IV (§ 1) immer innere und äußere Stützstrecken gleichzeitig bestimmt werden können.

Aus diesem Satz ergibt sich der nachfolgende:

Auf einer geschlossenen Kurve ohne freie Jordanbögen und geradlinige Kurvenstücke liegen gleichzeitig Konvexitäts- und Konkavitätsstellen überall dicht.

Berücksichtigen wir noch den bekannten Sachverhalt auf einer Jordankurve [5]), so kann der letzte Satz noch verschärft werden:

Auf einer geschlossenen Kurve ohne gradlinige oder freie konvexe Bögen liegen gleichzeitig die Konvexitäts- und die Konkavitätsstellen überall dicht.

---

[4]) Die beiden Behauptungen betreffen allgemeine Eigenschaften geschlossener Kurven, welche den Gegenstand einer besonderen Note des Verfassers bilden.

[5]) Vgl. die unter [1]) zitierte Abhandlung.

Liegen in der Umgebung eines Kurvenpunktes der geschlossenen Kurve geradlinige Kurvenstücke, so können in dieser Umgebung die inneren oder die äußeren Stützstrecken auch in den Fällen nicht allseitig erreichbarer Kurvenpunkte ganz fehlen. Dies ist bereits an sehr einfachen Beispielen ersichtlich.

Unentschieden bleibt bis jetzt noch die grundsätzliche Frage nach der Existenz der Stützstrecken schlechthin — äußeren oder inneren — in einer jeden Umgebung der Kurvenpunkte einer beliebigen geschlossenen Kurve, also auch in den Fällen geradliniger Kurventeile. Diese Frage werden wir im nächsten Paragraphen beantworten können.

§ 3. Der fragliche Ausnahmefall.

6. Die im § 1 geschilderten Verfahren sind ausreichend um die Stützstrecken der Bereiche sehr allgemeiner Art innerhalb beliebig kleiner Umgebungen der Randstellen zu bestimmen. Dennoch ist die Frage, wie weittragend diese Verfahren sind, nicht vollständig beantwortet. Es besteht vielmehr noch die Möglichkeit eines Ausnahmefalls solcher Begrenzungslinien, auf welchen die Stützstrecken nicht überall dicht verteilt sind. Gerade hier, wie aus dem weiteren ersichtlich wird, begegnen wir einer Art besonders interessanter Randmengen.

Wir wollen zunächst die Begrenzungen charakterisieren, deren Stützstrecken (relativ zu einer offenen Menge) nach keinem der geschilderten Verfahren sich konstruieren lassen. S sei wiederum die Berandung eines Bereiches $\mathfrak{B}$ von beliebigem Zusammenhang und $\mathfrak{C}(S)$ die zu S komplementäre offene Menge. Sollten in einer Umgebung $\mathfrak{U}(R)$ eines Punktes R von S die Voraussetzungen der im § 1 geschilderten Verfahren nicht erfüllt sein, so muß S sämtlichen folgenden Bedingungen genügen.

1. *Sämtliche Randstellen einer jeden Komponente von* $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ *innerhalb* $\mathfrak{U}(R)$ *müssen allseitig erreichbar sein. Insbesondere können auf dem Rande dieser Komponenten (innerhalb* $\mathfrak{U}(R)$*) keine geradlinigen Teile liegen.*

Diese Bedingung folgt aus der Nichterfüllung der Voraussetzungen des Verfahrens III.

2. *Der Durchschnitt* $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ *enthält unendlich viele Komponenten. Jeder Punkt von* $S \cdot \mathfrak{U}(R)$ *muß Häufungspunkt unendlich vieler Komponenten von* $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ *und sogar von* $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}(R)$ *sein.*

P sei ein beliebiger Punkt von $S \cdot \mathfrak{U}(R)$ und $\mathfrak{U}(P)$ eine beliebig kleine Umgebung von P innerhalb $\mathfrak{U}(R)$. Gäbe es nur eine einzige Komponente von $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$, welche $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(P)$ enthält, so wären (wegen Erfüllung der Bedingung 1) die Voraussetzungen des Verfahrens I erfüllt. Gäbe es endlich viele Komponenten von $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}(R)$, deren Vereinigung $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}(P)$ enthält, so wären, wie im letzten Paragraphen gezeigt wurde, die Voraussetzungen des Verfahrens II erfüllt.

3. *Je zwei Komponenten von* $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ *haben höchstens einen gemeinsamen Randpunkt innerhalb* $\mathfrak{U}(R)$.

Anderenfalls wären, wegen Bedingung 1, die Voraussetzungen des Verfahrens II erfüllt.

4. *Durch jeden Punkt der Randmenge* $S \cdot \mathfrak{U}(R)$ *geht ein ganz auf der Begrenzungslinie S liegende Geradenstrecke, deren ein Endpunkt auf dem Umgebungsrande liegt. Insbesondere liegt ein jeder Randpunkt einer jeden Komponenten der offenen Menge* $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ *auf einem solchen geradlinigen Begrenzungsteil.*

Wegen Bedingung 2 wären sonst die Voraussetzungen des Verfahrens IV erfüllt.

Eine Randmenge $S \cdot \mathfrak{U}(R)$, welche sämtlichen Bedingungen 1—4 gleichzeitig ge-

nügt, nennen wir eine *Gratrandmenge.* Jede Komponente von $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ nennen wir eine *Gratfigur* und ihre Begrenzung eine *Gratlinie.* — Die gleichzeitige Erfüllung aller dieser einschneidenden Bedingungen spricht dafür, daß es sich hier nur um einen besonderen Fall handeln kann. Es sind dies jedenfalls die Eigenschaften der Gebietsbegrenzungen (relativ zu offenen Mengen) im (zunächst allerdings fraglichen) Ausnahmefall der Nichtexistenz der Konvexitäts- und Konkavitätspunkte. Wir gelangen jetzt zu der für unsere Betrachtungen grundlegenden Frage nach der Möglichkeit des betreffenden Ausnahmefalles.

7. Das obige Stützstreckenproblem ist aufs engste mit dem folgenden auch an sich sehr interessanten Problem verknüpft.

Eine beliebige konvexe Figur F in der Ebene durch eine eindimensionale Schnittlinie in mindestens zwei konvexe Teilfiguren zu zerlegen, deren Begrenzungen die Peripherie von F treffen und innerhalb der Figur F nirgends geradlinig sind[6]). [Vgl. die (rein qualitative) Darstellung der fraglichen Zerlegung in Fig. 1.]

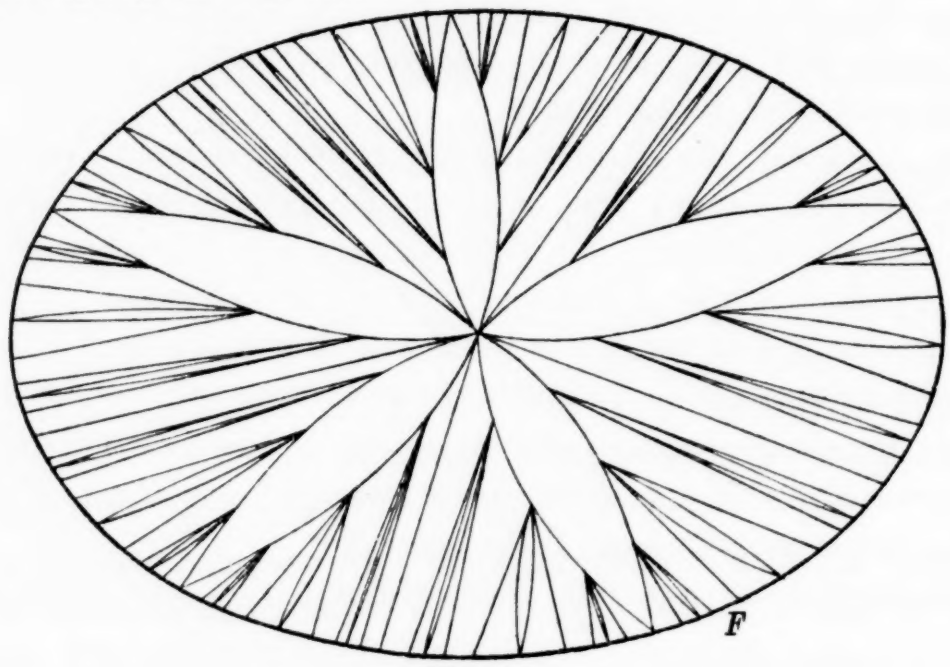

Fig. 1.

Die Lösung dieses Zerlegungsproblems ermöglicht unmittelbar den Übergang zu einer Randmenge ohne Stützstrecken. — Angenommen, eine konvexe Figur F wird im obigen Sinne durch eine eindimensionale Linie Φ zerlegt. R sei ein beliebiger Punkt von Φ innerhalb F und $\mathfrak{U}(R)$ eine hinreichend kleine Kreisumgebung von R, deren abgeschlossene Hülle ganz innerhalb F enthalten ist. Der Durchschnitt $\Phi \cdot \mathfrak{U}^0(R)$ bildet die Berandung eines nicht beschränkten Gebietes $\mathfrak{B}_\infty$. Es ist leicht einzusehen, daß sämtliche Randpunkte von $\mathfrak{B}_\infty$ innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ weder Konvexitäts- noch Konkavitätsstellen sein können. Gäbe es nämlich eine Konvexitäts- oder Konkavitätsstelle P von $\mathfrak{B}$ innerhalb $\mathfrak{U}(R)$, so müßte P jedenfalls eine *Konkavitätsstelle* einer Komponente des Durchschnittes $\mathfrak{B}_\infty \cdot \mathfrak{U}(R)$ sein. Dies ist aber unmöglich, da jede Teilfigur von $\mathfrak{B}_\infty \cdot \mathfrak{U}(R) = \mathfrak{C}(\Phi) \cdot \mathfrak{U}(R)$ konvex sein muß.

Wir überzeugen uns jetzt, daß auch umgekehrt die Berandung S eines ebenen Bereiches $\mathfrak{B}$ ohne Stützstrecken innerhalb einer konvexen Figur F diese letztere in konvexe Teilfiguren ohne geradlinige Begrenzungsstücke innerhalb F zerlegt, falls mindestens ein Punkt von S innerhalb F liegt.

[6]) Die Zerlegung der Figur F in Teilfiguren mit geradlinigen Begrenzungen oder in beliebig kleine Teilfiguren innerhalb F ist trivial und für das Stützstreckenproblem bedeutungslos. Vgl. insbes. die Ausführungen am Ende dieser Abhandlung.

Sollten nämlich in F keine Stützstrecken von S liegen, so darf keine Komponente von $\mathfrak{C}(S) \cdot F$ Konkavitätsstellen enthalten. Denn offenbar muß jede Konvexitäts- oder Konkavitätsstelle des Gebietes $\mathfrak{B}$ innerhalb F immer eine *Konkavitätsstelle einer Komponente* von $\mathfrak{C}(\Phi) \cdot F$ sein. Da aber jedes Gebiet, welches keine Konkavitätsstellen besitzt, konvex sein muß [7]), muß auch jede Komponente von $\mathfrak{C}(S) \cdot F$ konvex sein, ohne daß auf ihrer Berandung innerhalb F geradlinige Teile liegen können.

Es ist besonders erwähnenswert, daß die Lösung des Zerlegungsproblems für irgendeine spezielle konvexe Figur (z. B. Dreieck oder Kreis) die Zerlegung einer jeden konvexen Figur ermöglicht. Es genügt nämlich ein Dreieck oder einen Kreis, der die Figur F ganz in seinem Innern enthält zu zerlegen, wobei nur darauf geachtet werden muß, daß F nicht ganz in eine abgeschlossene konvexe Teilfigur dieser Zerlegung zu liegen kommt. Der Durchschnitt sämtlicher konvexer Teilfiguren (Gratfiguren) der zerlegten Figur mit F bildet eine F zerlegende Gratrandmenge.

Wird eine Kreisumgebung $\mathfrak{U}(R)$ eines Randpunktes R des Bereiches $\mathfrak{B}$ durch seine Berandung S in konvexe Teilfiguren zerlegt [8]), so lassen sich die für Gratrandmengen charakteristischen Bedingungen (1—4) direkt aus der Konvexität der Teilfiguren folgern.

Aus der Konvexität der Komponenten von $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ folgt direkt die Bedingung 1. Ebenso klar ist auch die Gültigkeit der Bedingung 3. Ziehen wir die Bedingung 1 in Betracht, so ergibt sich, daß jeder Punkt von $S \cdot \mathfrak{U}(R)$ (insbesondere auch ein jeder innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ liegende Randpunkt einer Komponente von $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$) ein Häufungspunkt unendlich vieler Komponenten von $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ sein muß. Ebenso kann ähnlich wie beim Beweis der Bedingung 2 gefolgert werden, daß jeder Punkt von $S \cdot \mathfrak{U}(R)$ Häufungspunkt unendlich vieler Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}(R)$ sein muß. Daraus folgt, daß mindestens ein Grenzgebilde solcher Komponenten nebst dem betreffenden Häufungspunkt, auch einen Punkt auf der Peripherie von $\mathfrak{U}(R)$ enthalten muß. Wenden wir jetzt den bekannten Auswahlsatz von Blaschke über Folgen konvexer Figuren [9]) an, so können wir schließen, daß jeder Punkt von $S \cdot \mathfrak{U}(R)$ auf einem geradlinigen Grenzgebilde einer Folge konvexer Komponenten des Durchschnittes $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}(R)$ liegen muß. Insbesondere muß auch mindestens ein Endpunkt des betreffenden Geradenintervalls auf der Peripherie von $\mathfrak{U}(R)$ liegen (vgl. Fig. 1).

8. Die obigen Betrachtungen über die Zerlegung konvexer Figuren in konvexe Teilfiguren ermöglichen uns die Lösung der im § 2 gestellten und bis jetzt noch unentschiedenen Frage nach der Existenz der Stützstrecken in beliebig kleinen Umgebungen geradliniger Stücke einer geschlossenen Kurve. Wir werden diese Frage im bejahenden Sinne beantworten und somit beweisen, daß *die Gesamtheit aller Stützstrecken auf einer geschlossenen (Schönflies-)Kurve überall dicht liegen muß.*

Um dies nachzuweisen, genügt es nach dem Obigen zu zeigen, daß eine konvexe Figur niemals durch eine geschlossene Kurve in konvexe Teilfiguren ohne geradlinige Begrenzungsteile zerlegt werden kann.

Angenommen, es liegen innerhalb einer Kreisumgebung $\mathfrak{U}(P)$ eines Punktes P der Schönflieskurve S keine Stützstrecken der beiden von S begrenzten Bereiche $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_\infty$. K sei der Begrenzungskreis der Kreisfläche $\mathfrak{K} = \mathfrak{U}(P)$ und r sein Radius. $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{U}^*(P)$ sei die Kreisfläche der Kreisumgebung von P mit dem Radius $\frac{r}{2}$ und K^* ihre Begrenzungslinie. — Die Durchschnitte $S \cdot \mathfrak{K}$ und $S \cdot \mathfrak{K}^*$ zerlegen die beiden Kreisflächen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$

[7]) Nach einem Satz von H. Tietze und Leja-Wilcocz.

[8]) Die Einschränkung, wonach jede Komponente von $\mathfrak{C}(S) \cdot \mathfrak{U}(R)$ Peripheriepunkte von $\mathfrak{U}(R)$ enthalten soll, ist im Falle einer Gebietsbegrenzung nicht notwendig.

[9]) W. Blaschke, Kreis und Kugel, 1916.

in konvexe Gratfiguren. Es sei F^* eine solche durch die Gratrandmenge $S \cdot \mathfrak{K}^*$ bestimmte Gratfigur und R^* ein beliebiger Randpunkt von F^* innerhalb $\mathfrak{K}^*$. Wir können jetzt (nach Bedingung 4, Ziffer 6) eine Folge konvexer Gratfiguren des Durchschnittes $\mathfrak{B}^0 \cdot \mathfrak{K}$

$$F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$$

auswählen, welche gegen ein Geradenintervall $\overline{R^*R}$ mit den Endpunkten R^* auf der Begrenzung von F^* und R auf $\mathfrak{K}$ konvergiert. Der Durchschnitt $F_n \cdot \mathfrak{K}^* = F_n^*$ ist für jedes n eine konvexe Gratteilfigur von $\mathfrak{K}^*$. Wir verbinden jetzt einen auf K^* liegenden Begrenzungspunkt O von F^* mit einem inneren Punkt des Bereiches $(F_1 - F_1^*)$ durch einen ganz in $\mathfrak{B}$ aber außerhalb $\mathfrak{K}^*$ verlaufenden Streckenzug t_1. Den Punkt O_1 verbinden wir mit einem inneren Punkt des Bereiches $(F_2 - F_2^*)$ durch einen ganz in $\mathfrak{B}$ aber außerhalb $\mathfrak{K}^*$ verlaufenden Streckenzug t_2. Allgemein verbinden wir den Punkt O_{n-1} innerhalb des Bereiches $(F_{n-1} - F_{n-1}^*)$ mit einem Punkt O_n innerhalb $(F_n - F_n^*)$ durch einen ganz innerhalb $\mathfrak{B}$ aber außerhalb $\mathfrak{K}^*$ verlaufenden Streckenzug t_n. Die abgeschlossene Hülle T^0 der Kurve

$$T = t_1 + t_2 + \cdots + t_n + \cdots$$

bildet ein Kontinuum und zerlegt die Ebene in endlich oder abzählbar viele einfach zusammenhängende Teilbereiche. Es sei $\mathfrak{H}$ derjenige dieser Bereiche, welcher $\mathfrak{U}^*(P)$ enthält. Wir durchlaufen jetzt das Geradenintervall $\overline{R^*R}$ in der Richtung von R^* nach R und bezeichnen mit Q den ersten getroffenen Punkt von $T \cdot \overline{R^*R}$, dessen Existenz sich aus der Konstruktion von T direkt ergibt. $\overline{R^*O}$ sei die Verbindungsstrecke der Punkte R^* und O. Der Streckenzug $\overline{R^*O} \dotplus \overline{R^*Q}$ bildet einen geradlinigen Querschnitt des Gebietes $\mathfrak{H}$. $\bar{\mathfrak{H}}$ sei das beschränkte der beiden Teilgebiete, in welche $\mathfrak{H}$ zerlegt wird. Nun ist es leicht ersichtlich, daß der Durchschnitt $S \cdot \bar{\mathfrak{H}}$ nicht leer ist, denn es muß jedenfalls ein auf der Berandung von F^* liegender Bogen von S innerhalb $\bar{\mathfrak{H}}$ enthalten sein. Andererseits ist die Begrenzung $\bar{H}$ von $\bar{\mathfrak{H}}$ im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}^0$ enthalten. Danach muß $\bar{\mathfrak{H}}$ in $\mathfrak{B}$ enthalten sein [10]), und es könnte $\bar{\mathfrak{H}}$ in Widerspruch zum vorhergehenden Ergebnis keine Teile von S enthalten.

II. Teil.

§ 4. Die Zerlegung konvexer Figuren in konvexe Teilfiguren.

9. Wir gehen jetzt zur Lösung des im letzten Paragraphen gekennzeichneten Zerlegungsproblems über. Wir werden zeigen, daß es immer möglich ist eine gegebene konvexe Figur F (z. B. ein Dreieck) in konvexe die Peripherie von F treffende Teilfiguren ohne geradlinige Begrenzungsteile zu zerlegen. Gleichzeitig wird damit die Existenz ebener Bereiche ohne Stützstrecken (relativ zu einer offenen Menge) nachgewiesen.

Für die Durchführung der gewünschten Zerlegung erweisen sich gewisse Zerlegungen einfacher konvexer Figuren als grundlegend, und diese bilden die Grundoperationen unserer Konstruktion.

Dreieckoperation. Es sei ABC ein beliebiges Dreieck (Fig. 2) und $\overset{\frown}{BC}$ ein ganz im Dreieck ABC liegender Kreisbogen mit den Endpunkten C und B. D sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Die Mittelpunkte A' und B' der Halbseiten $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$ verbinden wir durch Strecken mit C. Wir bestimmen jetzt einen zweiten die Eckpunkte C und B verbindenden Kreisbogen $\overset{\frown}{BC}^*$, der ganz im Dreieck $BB'C$ und in dem von $\overset{\frown}{BC}$ und $\overline{BC}$ begrenzten Kreissegment liegt. Einen solchen Bogen erhalten wir durch geeignete Wahl des Schnittpunktes seiner beiden Tangenten in den Endpunkten B und C auf dem im

[10]) Man berücksichtige, daß die Begrenzung von $\mathfrak{B}$ eine geschlossene Kurve ist. — Im übrigen kann eine geschlossene Kurve (wie sich aus dem obigen Beweisverlauf leicht ergibt) niemals eine Gratrandmenge enthalten.

Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ errichteten Lot in hinreichender Nähe der Seite $\overline{BC}$. Den Punkt C', welcher den Bogen $\overset{*}{\overset{\frown}{BC}}$ in gleiche Teile zerlegt, verbinden wir durch Strecken mit den Punkten A', B', B und C, wodurch das Dreieck ABC in drei Dreiecke und ein Viereck zerlegt wird. Diese Zerlegung des Dreiecks ABC nennen wir eine *Dreieckoperation* in bezug auf die Seite $\overline{AB}$ und den Kreisbogen $\overset{\frown}{BC}$. Wesentlich an dieser Operation ist *die Konvexität des Dreiecks* $AA'C'C$. Diese ergibt sich daraus, daß $AA'C'C$ sich als Vereinigung zweier Dreiecke $AA'C$ und $A'C'C$, welche die gemeinsame Seite $\overline{A'C}$ haben, sonst aber zueinander fremd sind, darstellen läßt. Darnach muß C' insbesondere eine Konvexitätsstelle des Vierecks sein. Die Eckpunkte A' und C müssen ebenfalls Konvexitätsstellen sein, da sie auf einer das Viereck enthaltenden konvexen Figur liegen. — Die obige Operation hat weiterhin zur Folge, daß je eine Hälfte des Bogens $\overset{*}{\overset{\frown}{BC}}$ im Viereck $AA'C'C$ und im Dreieck $BB'C'$ liegt.

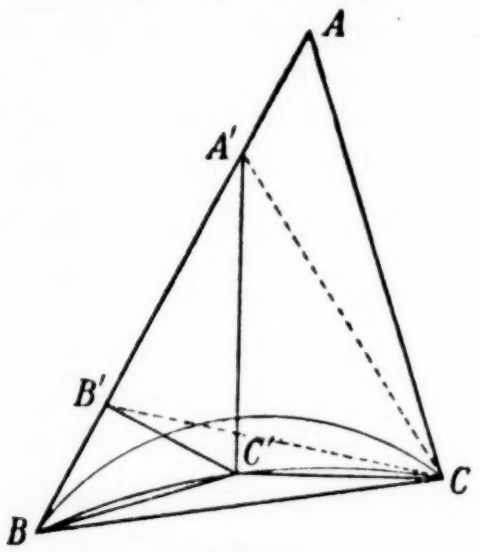

Fig. 2.

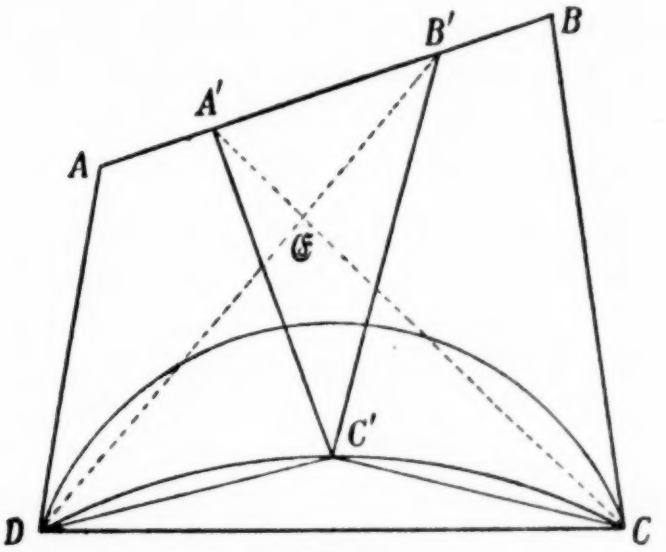

Fig. 3.

Viereckoperation. Es sei $ABCD$ ein beliebiges konvexes Viereck mit einer in der Fig. 3 angegebenen Eckpunktfolge und $\overset{\frown}{CD}$ ein ganz im Viereck liegender Kreisbogen mit den Endpunkten C und D. D' sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Die Mittelpunkte A' und B' der Seitenhälften $\overline{AD'}$ und $\overline{BD'}$ verbinden wir durch Strecken mit den Eckpunkten C und D und bezeichnen mit $\mathfrak{E}$ den Schnittpunkt der beiden Verbindungsstrecken $\overline{A'C}$ und $\overline{B'D}$. Es sei $\overset{*}{\overset{\frown}{CD}}$ ein ganz innerhalb des Dreiecks $\mathfrak{E}CD$ und des durch $\overline{CD}$ und $\overset{\frown}{CD}$ begrenzten Kreissegments liegender Kreisbogen mit den Endpunkten C und D. Einen solchen Kreisbogen erhalten wir durch eine geeignete Wahl des Schnittpunktes seiner Tangenten in seinen Endpunkten C und D. Den Punkt C', welcher den Bogen $\overset{*}{\overset{\frown}{CD}}$ in gleiche Teile zerlegt verbinden wir durch Strecken mit den Punkten A', B', C und D. Die dadurch erfolgte Zerlegung des Vierecks $ABCD$ in zwei Dreiecke und zwei Vierecke nennen wir eine *Viereckoperation* in bezug auf die Seite $\overline{AB}$ und den Kreisbogen $\overset{\frown}{CD}$. *Die Viereckoperation bedingt die Konvexität der beiden Vierecke* $AA'C'D$ *und* $BB'C'C$. Das Viereck $AA'C'D$ setzt sich aus den beiden Dreiecken $AA'D$ und $A'C'D$ mit einer gemeinsamen Seite $\overline{A'D}$ und ohne gemeinsame innere Punkte zusammen. Danach muß C' eine Konvexitätsstelle sein. Die anderen Eckpunkte des Vierecks $AA'C'D$ liegen auf den Seiten eines ihn enthaltenden konvexen Vierecks und müssen ebenfalls Konvexitätsstellen sein. Entsprechendes gilt auch für das Viereck $BB'C'C$. Weiterhin können wir feststellen, daß in den Vierecken $AA'C'D$ und $BB'C'C$ je eine Hälfte des Bogens $\overset{*}{\overset{\frown}{CD}}$ liegen muß. Der Bogen $\overset{*}{\overset{\frown}{CD}}$ wird nämlich (vom Punkt C' abgesehen) von den Strecken $\overline{A'C'}$ und $\overline{B'C'}$ in keinem Punkt getroffen.

Im nachfolgenden wollen wir jedesmal das durch eine Dreieck- oder eine Viereckoperation bestimmte dem Dreieck $A'B'C'$ entsprechende Dreieck ein *Mitteldreieck* nennen. Den C' entsprechenden Punkt nennen wir den *Schnittpunkt* und die Punkte A' und B' die *Teilpunkte* der betreffenden Operation.

10. Es sei $A_0^0 B_0^0 C_0^0$ ein beliebiges Dreieck mit den Endpunkten A_0^0, B_0^0 und C_0^0. D sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{A_0^0 B_0^0}$ und $\overline{C_0^0 D}$ die Verbindungsstrecke von C_0^0 mit D. — $\widehat{C_0^0 D}$ sei ein beliebiger im Dreieck $A_0^0 D C_0^0$ liegender Kreisbogen mit den Endpunkten C_0^0 und D. Das Dreieck $A_0^0 D C_0^0$ zerlegen wir jetzt nach einer Dreieckoperation in bezug auf die Seite $\overline{A_0^0 D}$ und den Bogen $\widehat{C_0^0 D}$ und bezeichnen mit C_1^0 den Schnittpunkt der betreffenden Operation. A_1^0 und A_2^0 seien die beiden Teilpunkte der Dreieckoperation, von welchen A_1^0 näher zu A_0^0 liegen möge. Wir betrachten jetzt das Dreieck $A_2^0 D C_1^0$ und zerlegen dieses wiederum in bezug auf die Seite $\overline{A_2^0 D}$ und den (durch die ursprüngliche Operation bestimmten) Kreisbogen $\widehat{C_1^0 D}$. C_2^0 sei der Schnittpunkt und A_3^0 bzw. A_4^0 die beiden Teilpunkte der durchgeführten Dreieckoperation, wobei A_3^0 näher zu A_2^0 liegen möge. Ganz allgemein zerlegen wir für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ das Dreieck $A_{2m}^0 D C_m^0$ nach der Dreieckoperation in bezug auf die Seite $\overline{A_{2m}^0 D}$ und den (durch die vorhergehende Dreieckoperation bestimmten) Kreisbogen $\widehat{C_m^0 D}$. Den Schnittpunkt dieser Operation bezeichnen wir mit C_{m+1}^0 und die beiden Teilpunkte mit A_{2m+1}^0 und A_{2m+2}^0, wobei A_{2m+1}^0 der zu A_{2m}^0 näher gelegene Teilpunkt sein möge.

Wir betrachten jetzt für $m = 0, 1, 2, \ldots$ die Folge von Vierecken

$$A_0^0 A_1^0 C_1^0 C_0^0, \quad A_2^0 A_3^0 C_2^0 C_1^0, \ldots, A_{2m}^0 A_{2m+1}^0 C_{m+1}^0 C_m^0, \ldots$$

von welchen je zwei nacheinanderfolgende für ein jedes m den Eckpunkt C_{m+1}^0 gemeinsam haben, sonst aber durch das Mitteldreieck der $m+1$-ten Dreieckoperation voneinander getrennt werden. Jedes der Vierecke dieser Folge ist durch eine Dreieckoperation entstanden und muß daher konvex sein. Dies ermöglicht uns die weitere Konstruktion.

Jedes Viereck $A_{2m}^0 A_{2m+1}^0 C_{m+1}^0 C_m^0$ zerlegen wir durch eine auf die Seite $A_{2m}^0 A_{2m+1}^0$ und den Kreisteilbogen $\widehat{C_m^0 C_{m+1}^0}$ von $\widehat{C_m^0 D}$ bezogene Viereckoperation und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit $\overline{C}_{m+1}^0$. $\overline{A}_{2m}^0$ und $\overline{A}_{2m+1}^0$ seien die beiden Teilpunkte dieser Operation, wobei $\overline{A}_{2m}^0$ näher zu A_{2m}^0 liegen möge. Um die Schreibweise zu vereinfachen, bezeichnen wir die *an den m-ten Stellen* in der nachfolgenden Anordnung verzeichneten Punkte der beiden Folgen

$$A_0^0, \overline{A}_0^0, \overline{A}_1^0, A_1^0, \quad A_2^0, \overline{A}_2^0, \overline{A}_3^0, A_3^0, \ldots, A_{2m}^0, \overline{A}_{2m}^0, \overline{A}_{2m+1}^0, A_{2m+1}^0, \ldots$$

und

$$C_0^0, \overline{C}_1^0, C_1^0, \overline{C}_2^0, C_2^0, \ldots, C_m^0, \overline{C}_{m+1}^0, C_{m+1}, \ldots$$

mit A'_m und C'_m. Mit $\widehat{C'_m C'_{m+1}}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ bezeichnen wir den Kreisbogen mit den Endpunkten C'_m und C'_{m+1}, welcher auf dem Kreise durch die Punkte C'_m, C'_{m+1} und C'_{m+2} für gerade m und durch die Punkte C'_{m-1}, C'_m und C'_{m+1} für ungerade m liegt. Jedes Viereck $A'_{2m} A'_{2m+1} C'_{m+1} C'_m$ ist konvex und kann deshalb in bezug auf die Seite $\overline{A'_{2m} A'_{2m+1}}$ und den Kreisbogen $\widehat{C'_{2m} C'_{m+1}}$ nach der Viereckoperation wiederum zerlegt werden.

Wir setzen eine solche Zerlegung beliebig fort und nehmen eine Folge von Vierecken

$$A_0^\nu A_1^\nu C_1^\nu C_0^\nu, \quad A_2^\nu A_3^\nu C_2^\nu C_1^\nu, \ldots, A_{2m}^\nu A_{2m+1}^\nu C_{m+1}^\nu C_m^\nu, \ldots \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

als gegeben an. In jedem Viereck $A_{2m}^\nu A_{2m+1}^\nu C_{m+1}^\nu C_m^\nu$ sind die Ecken durch einen Kreisbogen $\widehat{C_m^\nu C_{m+1}^\nu}$ verbunden. In bezug auf die Seite $\overline{A_{2m}^\nu A_{2m+1}^\nu}$ und den Bogen $\widehat{C_m^\nu C_{m+1}^\nu}$ zer-

legen wir das betreffende Viereck nach der Viereckoperation. $\bar{C}^{\nu}_{m+1}$ sei der Schnittpunkt und $\bar{A}^{\nu}_{2m}$ bzw. $\bar{A}^{\nu}_{2m+1}$ ihre beiden Teilpunkte, wobei $\bar{A}^{\nu}_{2m}$ näher zu A^{ν}_{2m} liegen möge. Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir, ähnlich wie oben, die *an den m-ten Stellen* in der nachfolgenden Anordnung verzeichneten Punkte der beiden Folgen

$$A^{\nu}_0, \bar{A}^{\nu}_0, \bar{A}^{\nu}_1, A^{\nu}_1, \quad A^{\nu}_2, \bar{A}^{\nu}_2, \bar{A}^{\nu}_2, A^{\nu}_3, \ldots \quad A^{\nu}_{2m}, \bar{A}^{\nu}_{2m}, \bar{A}^{\nu}_{2m+1}, A^{\nu}_{2m+1}, \ldots$$

und

$$C^{\nu}_0, \bar{C}^{\nu}_1, C^{\nu}_1, \bar{C}^{\nu}_2, C^{\nu}_2, \ldots, \quad C^{\nu}_m, \bar{C}^{\nu}_{m+1}, C^{\nu}_{m+1}, \ldots$$

mit $A^{\nu+1}_m$ und $C^{\nu+1}_m$. Jedes Viereck $A^{\nu+1}_{2m} A^{\nu+1}_{2m+1} C^{\nu+1}_{m+1} C^{\nu+1}_m$ ist konvex. Außerdem enthält es einen Kreisteilbogen $\overset{\frown}{C^{\nu+1}_m C^{\nu+1}_{m+1}}$ des Kreises durch die drei Punkte $C^{\nu+1}_m$, $C^{\nu+1}_{m+1}$ und $C^{\nu+1}_{m+2}$ für gerade und durch die Punkte $C^{\nu+1}_{m-1}$, $C^{\nu+1}_m$ und $C^{\nu+1}_{m+2}$ für ungerade m. Wir können also unsere Konstruktion mit Hilfe der Viereckoperation beliebig oft wiederholen.

Sämtliche im Dreieck $A^0_0 D C^0_0$ durchgeführten Betrachtungen und Konstruktionen denken wir uns jetzt ganz entsprechend in dem (nicht notwendig ähnlichen) Dreieck $B^0_0 D C^0_0$ durchgeführt, wobei die Seiten $\overline{B^0_0 D}$ und $\overline{C^0_0 D}$ des Dreiecks $B^0_0 D C^0_0$ den Dreieckseiten $\overline{A^0_0 D}$ und $\overline{C^0_0 D}$ des Dreiecks $A^0_0 D C^0_0$ entsprechen mögen. Die den Punkten A^{ν}_m und C^{ν}_m für beliebige m und ν im Dreieck $B^0_0 D C^0_0$ entsprechenden (nicht notwendig zu diesen symmetrisch liegenden) Punkte bezeichnen wir mit $A^{\nu *}_m$ und $C^{\nu *}_m$.

Die Zusammenfassung sämtlicher bisher durchgeführten Operationen in bezug auf das Dreieck $A^0_0 B^0_0 C^0_0$ nennen wir einen *Operationszyklus*. Die Dreieckseite $\overline{A^0_0 B^0_0}$ nennen wir die *Achse* des Operationszyklus.

Die Gesamtheit aller Schnittpunkte sämtlicher Drei- und Viereckoperationen des durchgeführten Operationszyklus bezeichnen wir mit (C). Wir werden weiter zeigen, daß die abgeschlossene Hülle $(C)^0 = L$ der abzählbaren Punktmenge (C) die Begrenzungskurve einer konvexen Figur F bildet. Diese Figur bzw. ihre Begrenzungslinie nennen wir die *Gratfigur* bzw. die *Gratlinie* des Operationszyklus.

Wir setzen jetzt unsere Konstruktion fort. Jedes Dreieck $A^{\nu}_{2m-1} A^{\nu}_{2m} C^{\nu}_m (m \geqq 1)$ ist ein Mitteldreieck, welches für $\nu = 0$ durch eine Dreieck- und für $\nu > 0$ durch eine Viereckoperation bestimmt wird. Jedes solche Dreieck (bzw. das entsprechende Dreieck $A^{\nu *}_{2m-1} A^{\nu *}_{2m} C^{\nu *}_m$) nennen wir ein Mitteldreieck 1-ter Ordnung. Das Dreieck $A^0_0 B^0_0 C^0_0$ bezeichnen wir dabei als das Mitteldreieck 0-ter Ordnung. — In bezug auf jedes Mitteldreieck 1-ter Ordnung führen wir jetzt einen Operationszyklus durch. Als Achse des Operationszyklus wählen wir jedesmal diejenige Seite des Mitteldreiecks, die auf der Seite $\overline{A^0_0 B^0_0}$ des Dreiecks $A^0_0 B^0_0 C^0_0$ liegt. Einen jeden dieser Operationszyklen benennen wir als einen solchen 1-ter Ordnung, während wir den einzigen in bezug auf das Dreieck $A^0_0 B^0_0 C^0_0$ durchgeführten als einen von 0-ter Ordnung bezeichnen. Die Gesamtheit aller Gratfiguren und Gratlinien, die durch sämtliche Operationszyklen 1-ter Ordnung bestimmt werden, bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_1(F)$ und $\mathfrak{M}_1(L)$. $\mathfrak{M}_0(F)$ und $\mathfrak{M}_0(L)$ mögen die allein aus F und L bestehenden Gesamtheiten sein. — Ganz allgemein sei die Gesamtheit aller Mitteldreiecke n-ter Ordnung ($n = 0, 1, 2, \ldots$) definiert. Für jedes solche Dreieck führen wir den Operationszyklus durch, als dessen Achse wir immer die auf $\overline{A^0_0 B^0_0}$ liegende Dreiecksseite wählen. Ein jeder solche Operationszyklus sei als von n-ter Ordnung benannt. (Jede Dreieck- bzw. Viereckoperation eines Operationszyklus n-ter Ordnung bestimmt ein Mitteldreieck $n+1$-ter Ordnung.) Die Gesamtheit aller durch sämtliche Operationszyklen n-ter Ordnung bestimmten Gratfiguren bzw. Gratlinien bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_n(F)$ bzw. $\mathfrak{M}_n(L)$.

Wir bilden jetzt die Vereinigungsmenge aller Gratlinien der Gesamtheit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{M}_n(L) = \mathfrak{M}(L)$$

und bezeichnen diese mit $\Sigma\mathfrak{M}(L)$. Mit der Bestimmung der abgeschlossenen Menge $\Sigma^0\mathfrak{M}(L) = \Phi$ ist unsere Konstruktion beendet. — Wir werden uns jetzt überzeugen, daß das Dreieck $A_0^0B_0^0C_0^0$ durch Φ in konvexe Teilfiguren ohne geradlinige Begrenzungsstücke und je einen auf $\overline{A_0^0B_0^0}$ liegenden Randpunkt zerlegt wird. Ein jeder nicht leere abgeschlossene Durchschnitt von Φ mit einer innerhalb $A_0^0B_0^0C_0^0$ liegenden konvexen Figur bildet die Berandung eines unbeschränkten einfach-zusammenhängenden Gebietes, dessen Konvexitäts- und Konkavitätsstellen nur auf der Berandung der betreffenden Figur liegen können.

11. Wir beweisen zunächst, daß jede Gratfigur konvex ist und keine geradlinigen Begrenzungsteile enthält. Diese Behauptung beweisen wir für die Figur F des 0-ten Operationszyklus. Der Beweis gilt natürlich auch für jede Gratfigur eines Operationszyklus n-ter Ordnung.

Wir überzeugen uns zunächst, daß die mit der abgeschlossenen Vereinigung

$$\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \overset{\frown}{C_m^0C_{m+1}^0} + \sum_{m=0}^{\infty} \overset{\frown}{C_m^{0*}C_{m+1}^{0*}}\Big)^0 = C^{(0)}$$

identische einfache geschlossene Kurve die Begrenzung einer konvexen Figur bildet. Die Tangente des Kreisbogens $\overset{\frown}{C_m^0C_{m+1}^0}$ (bzw. $\overset{\frown}{C_m^{0*}C_{m+1}^{0*}}$) an der Stelle C_m^0 (bzw. C_m^{0*}) ist für jedes m eine Stützgerade der betreffenden Figur. In sämtlichen sonstigen Punkten der Kurve $C^{(0)}$ (von der Stelle D abgesehen) fallen die Stützgeraden ebenfalls mit den Kreisbogentangenten zusammen. Die von $C^{(0)}$ begrenzte Figur muß also konvex sein. — Wir betrachten jetzt die geschlossenen mit den Vereinigungen

$$\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \overset{\frown}{C_m^{\nu}C_{m+1}^{\nu}} + \sum_{m=0}^{\infty} \overset{\frown}{C_m^{\nu*}C_{m+1}^{\nu*}}\Big)^0 = C^{(\nu)} \qquad (\nu > 0)$$

identischen einfachen Kurven. Die von $C^{(\nu-1)}$ begrenzte (beschränkte) Figur setzen wir als konvex voraus. Der Übergang von $C^{(\nu-1)}$ zu $C^{(\nu)}$ geschieht auf Grund einer Folge von Viereckoperationen, und wir können leicht einsehen, daß jede Stützgerade von $C^{(\nu-1)}$ an der Stelle C_m^{ν} (bzw. $C_m^{\nu*}$) auch eine Stützgerade von $C^{(\nu)}$ an derselben Stelle ist. In sämtlichen Punkten von $C^{(\nu)}$, die keine Eckpunkte sind (von D abgesehen), liegen die Stützstrecken der betreffenden Figur auf Kreisbogentangenten. Jede durch eine Kurve $C^{(\nu)}$ begrenzte Figur muß danach konvex sein. Der Durchschnitt aller dieser Figuren muß ebenfalls konvex sein und ist mit F identisch [11]).

Um einzusehen, daß die Begrenzung L von F keine geradlinigen Teile enthält, genügt es hervorzuheben, daß in jeder noch so kleinen Umgebung eines jeden Punktes von L immer solche Punktetripel von L enthalten sind, welche auf einem Kreisbogen einer Kurve $C^{(\nu)}$ liegen.

Um nun zum Ziel zu gelangen, genügt es nachzuweisen, daß ein beliebiger innerer Punkt des Dreiecks $A_0^0B_0^0C_0^0$, welcher nicht im Innern einer Gratfigur liegt, auf Φ liegen muß. Im letzteren Fall müßte P ein Häufungspunkt von Gratlinien sein und auf einem geradlinigen Stück von Φ (mit einem Endpunkt auf $\overline{A_0^0B_0^0}$) liegen. Wir können uns davon leicht direkt überzeugen.

Existiert eine erste Zahl $n = n_0$ mit der Eigenschaft, daß der Punkt P innerhalb oder auf dem Rande eines Mitteldreiecks n_0-ter aber keiner höheren Ordnung enthalten

---

[11]) Die Figur F kann auch leicht als die Vereinigungsmenge einer aufsteigenden ineinandergeschachtelten Folge konvexer Polygonflächen dargestellt werden.

ist, so betrachten wir den in bezug auf dieses Dreieck durchgeführten Operationszyklus. Der Punkt P muß ein Häufungspunkt unendlich vieler (ev. ineinandergeschachtelter) durch Viereckoperationen bestimmter Vierecke sein, deren Grenzgebilde eine Strecke ist. In jedem dieser Vierecke ist ein Mitteldreieck $n_0 + 1$-ter Ordnung enthalten, und die betreffende Strecke auf Φ muß Häufungsstrecke einer Folge von Gratfiguren bzw. -linien sein, von welchen eine jede durch einen Operationszyklus $n_0 + 1$-ter Ordnung bestimmt wird.

Liegt der Punkt P für ein noch so großes n in einem Mitteldreieck n-ter Ordnung, so liegt er auch auf einer Strecke, gegen welche eine Folge ineinandergeschachtelter Mitteldreiecke von einer ins Unendliche wachsenden Ordnung konvergiert. Diese Strecke ist aber auch das Grenzgebilde einer Folge durch Operationszyklen entsprechend wachsender Ordnung bestimmter Gratfiguren.

12. Durch Modifikation der Konstruktion von Φ gewinnen wir noch eine andere vereinfachte Zerlegung des Dreiecks in konvexe Teilfiguren, deren Gratlinien aus Kreisbögen aufgebaut sind. Dies geschieht durch die folgende Vereinfachung der Viereckoperationen.

Wiederum sei im Viereck $ABCD$ ein Kreisbogen $\overset{\frown}{CD}$ gegeben (vgl. Ziff. 9). Die Punkte A', B' und D' mögen ebenfalls dieselbe Bedeutung haben wie früher. Wir verbinden die entgegengesetzten Eckpunkte A, C und B, D durch Strecken („Diagonalen") $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ und bezeichnen den Schnittpunkt dieser letzteren mit E. Es sei $\overset{\frown}{CD}^*$ ein ganz innerhalb des Dreiecks ECD liegender Kreisbogen mit den Endpunkten C und D. C' sei der Punkt, welcher den Bogen $\overset{\frown}{CD}^*$ in zwei gleiche Teilbögen $\overset{\frown}{C'C}$ und $\overset{\frown}{C'D}$ zerlegt. Den Punkt C' verbinden wir durch Strecken mit den Punkten A', B', C und D. Das Viereck wird durch diese Strecken in zwei Drei- und zwei Vierecke zerlegt, wobei die beiden Teilvierecke ($AA'C'D$ und $BB'C'C$) konvex sind. — Das wesentliche an dieser Operation besteht darin, daß die beiden Bogenhälften innerhalb der erwähnten konvexen Teilvierecke die in bezug auf das ursprüngliche Viereck $ABCD$ geforderte Eigenschaft des Bogens $\overset{\frown}{CD}^*$ besitzen. Betrachten wir z. B. das Viereck $AA'C'D$. E' sei der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Wir überzeugen uns, daß der Bogen $\overset{\frown}{C'D}$ ganz innerhalb des Dreiecks $E'C'D$ liegen muß. Zunächst bemerken wir, daß die Strecke $\overline{A'D}$ das Dreieck ECD (und somit auch den Bogen $\overset{\frown}{CD}^*$) überhaupt nicht trifft. Weiterhin berücksichtigen wir, daß die Strecke $\overline{AC'}$ und der Bogen $\overset{\frown}{CD}^*$ in verschiedenen Halbebenen in bezug auf die Tangente des Bogens $\overset{\frown}{CD}^*$ im Punkte C' liegen. Der Bogen $\overset{\frown}{C'D}$ wird also (außer in den Endpunkten) von keiner der Seiten des Dreiecks $E'C'D$ getroffen, hat aber andererseits mit der Dreiecksfläche gemeinsame Punkte und muß deshalb ganz innerhalb des Dreiecks verlaufen.

Diese Überlegung ermöglicht uns die Bildung der konvexen Gratlinien aus Kreisbögen. Zerlegen wir nämlich erstmals ein jedes durch eine Dreieckoperation bestimmtes konvexes Viereck, so können wir für die weiteren Viereckoperationen desselben Operationszyklus die Teilbögen der einmal gewählten Kreisbögen beibehalten. Im übrigen verläuft die Zerlegung des Dreiecks $A_0^0 B_0^0 C_0^0$ der früher geschilderten Zerlegung ganz analog [12]).

13. Das oben gelöste Zerlegungsproblem können wir noch von einem allgemeineren Gesichtspunkt beleuchten.

Wir betrachten die Zerlegung eines n-dimensionalen ($n \geqq 2$) konvexen Körpers F durch $n - 1$-dimensionale Gebilde S unter folgenden Bedingungen.

Es sei

$$[h, k]$$

ein Paar ganzer positiver Zahlen $\geqq -1$ und $\leqq n - 1$.

Indem wir die leere Menge als -1-dimensional und die diskreten Punkte als 0-dimensional bezeichnen, setzen wir voraus:

1. Ein jeder innerhalb F liegende Punkt der Begrenzung eines jeden Teilkörpers f von F liegt auf einem h-dimensionalen und nicht auf einem höherdimensionalen konvexen Teilstück der Begrenzung von f.

2. Ein jeder Punkt von S innerhalb F liegt auf einer k-dimensionalen ($k > -1$) und nicht auf einer höherdimensionalen konvexen Grenzmenge mindestens einer Folge der Teilkörper des Körpers F, oder es ist die Menge solcher Grenzpunkte auf S (im Falle endlich vieler Teilkörper von F) leer. Im letzten Fall sei $k = -1$.

Auf diese Weise wird einem jeden Zahlenpaar $[h, k]$ für

$$-1 < h \leqq n-1$$

und

$$-1 \leqq k \leqq n-1$$

ein gewisser Typus der Zerlegung des konvexen Körpers F zugeordnet.

Betrachten wir etwa die ebenen Figuren, so ist leicht erkennbar, daß die Zerlegung von einem Typus, für welchen $h \geqq k$ ist, bis auf den Fall $[0, -1]$, also in den Fällen

$$[0, 0],\quad [1, -1],\quad [1, 0],\quad [1, 1]$$

immer möglich ist. Dem einzigen Typus, für welchen $h < k$ ist, d. h. dem Fall

$$[0, 1],$$

entspricht gerade die von uns durchgeführte Zerlegung einer konvexen Figur in konvexe Gratfiguren.

Für $n = 3$ können wir ebenfalls sofort feststellen, daß bis auf den unmöglichen Fall $[0, -1]$, die Zerlegungen, welche der Bedingung $h \geqq k$ entsprechen, sich sofort angeben lassen. Für $h < k$ gibt es hier hingegen drei Fälle

$$[0, 1],\quad [0, 2],\quad [1, 2]$$

Wir bemerken zunächst, daß die Zerlegung vom Typus $[1, 2]$ sich auf Grund der Zerlegung vom Typus $[0, 1]$ in der Ebene leicht durchführen läßt. Es läßt sich nämlich durch Translation eines n-dimensionalen Gebildes $F + S$ vom Typus $[h, k]$ für $k > -1$ ein $n+1$-dimensionaler Körper vom Typus $[h+1, k+1]$ gewinnen.

Vom besonderen Interesse dürften die sachlich neuartigen Zerlegungen vom Typus $[0, 1]$ und $[0, 2]$ im Raume sein, deren Durchführung nicht auf der Hand liegt. So begegnen wir ganz allgemein bei n-dimensionalen Körpern den interessanten Zerlegungsproblemen vom Typus

$$[0, 1],\quad [0, 2], \ldots, [0, n-1].$$

Die Zahl dieser Zerlegungsprobleme wächst mit der Dimensionszahl, ohne daß wir ihre Lösungen für $n > 2$ besitzen.

---

[12]) Die Möglichkeit des geschilderten Ausnahmefalls bildet die Erklärung für die Nichtanwendbarkeit der Verfahren I—IV (§ 1) für die Bestimmung der Stützstrecken beliebiger Gratrandmengen. Naturgemäß existieren auch Gratrandmengen, welche Konvexitäts- und Konkavitätsstellen enthalten. Beispiele solcher Gratrandmengen lassen sich verhältnismäßig einfach bilden. Wir erwähnen dies hier nur andeutungsweise. — Wir gehen ebenfalls von einem Dreieck ABC aus und zerlegen die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks durch die Punkte A' und B' in drei gleiche Teile. Die Teilungspunkte verbinden wir geradlinig mit dem Eckpunkt C. Jetzt wählen wir innerhalb des Dreiecks $A'B'C$ zwei Kreisbögen $\overset{\frown}{A'C}$ und $\overset{\frown}{B'C}$, welche (außer in C) sich in keinem Punkt schneiden. Durch die beiden Kreisbögen wird die Dreiecksfläche in zwei konvexe und einen nicht konvexen Bereich zerlegt. Die weitere Konstruktion ist der Zerlegung in konvexe Teilfiguren ähnlich. In bezug auf die beiden konvexen Teilbereiche der Dreiecksfläche können wir unter Festhaltung der beiden Kreisbögen $\overset{\frown}{A'C}$ und $\overset{\frown}{B'C}$ sämtliche einem Operationszyklus entsprechenden Konstruktionen durchführen. Entsprechend werden auch die Operationszyklen höherer Ordnung durchgeführt. Der von den beiden Kreisbögen bestimmte nicht konvexe Teilbereich der Dreiecksfläche stellt eine nicht konvexe Gratfigur des betreffenden Operationszyklus dar.

Eingegangen 19. Dezember 1930.

Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz und deren Anwendung.

Von *Gerhard Haenzel* in Berlin-Wittenau.

Die Theorie der Involutionen schien schon lange ein völlig durchforschtes Gebiet der Geometrie zu sein. Die Eigenschaften involutorischer Strahlenbüschel, Punktreihen und Ebenenbüschel erster Ordnung und die der involutorischen Verwandtschaften zwischen Grundgebilden der zweiten Stufe und zwischen Grundgebilden der dritten Stufe sind bekannt. Seit v. Staudt die Involutionen zum Fundament seiner grundlegenden geometrischen Theorie des Imaginären gemacht hatte, konnten wesentliche neue Fortschritte auf diesem Gebiete der Geometrie nicht mehr erzielt werden.

Erst in neuester Zeit erfuhr die Theorie der Involutionen eine tiefgehende Erweiterung dadurch, daß Herr Jolles eine vollständige und organische Theorie aller Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz aufstellte. Die Grundlage für diese Theorie ruht in der Erkenntnis, daß die Paare einander zugeordneter Strahlen einer Involution auf einer linearen Strahlenkongruenz aus reziproken Polaren eines polaren Raumes bestehen, eine Definition, die für alle reellen und imaginären Vorkommnisse in gleicher Weise tragfähig bleibt. Von hier aus wurden erstmalig Involutionen auf zweidimensionalen Gebilden der Strahlengeometrie nachgewiesen, und die Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz dürften nunmehr für den Strahlenraum von ähnlicher Bedeutung sein wie die Involutionen auf den Grundgebilden erster Stufe für den Punkt- und Ebenenraum.

Die diesbezüglichen Untersuchungen des Herrn Jolles[1]) bedienen sich der rein synthetischen Methode. Das liegt aber in der Natur der Sache, denn sie stützen sich unmittelbar auf das v. Staudtsche Werk, und es gelang hier zum ersten Male, die geometrische Theorie des Imaginären sachgemäß zu erweitern.

Welche Ergebnisse das Studium der Involutionen im Strahlenraume für die Geometrie selbst noch zeitigen wird, bleibt abzuwarten. Daneben entsteht schon jetzt die Aufgabe, die neue Theorie auf das Gebiet der Analysis auszudehnen und auf ihre Verwendbarkeit zu prüfen. Zu diesem Zweck müssen zunächst ihre Grundlagen durch einfache analytische Ansätze charakterisiert werden. Dabei leistet die Theorie der Elementarteiler[2]) Dienste, wie denn auch umgekehrt die Theorie involutorischer linearer

[1]) Jolles, Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz, Mathem. Zeitschr. **27** (1928), S. 427. — Als Vorarbeiten dieser grundlegenden Abhandlung sind anzusehen: Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz, Crelle **134** (1908), S. 1. — Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenkongruenz, Mathem. Zeitschr. **26** (1927), S. 177.

[2]) Weierstraß, Über Scharen bilinearer und quadratischer Formen, Berl. Monatsber. 1868, S. 310 ff., Ges. Werke Bd. II, S. 19 ff. — Kronecker, Berl. Monatsber. 1874, S. 215, Ges. Werke Bd. I, S. 291—392. — Weitere Literatur und ein Überblick über die Entwicklung der Theorie finden sich bei Muth, Theorie und Anwendung der Elementarteiler, Leipzig 1899.

Strahlenkongruenzen die Elementarteilertheorie als klassifikatorisches Prinzip mitunter ersetzen kann [3]). Dann lassen sich die Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz im vierdimensionalen Raume verwenden. Insbesondere werden durch sie die Kollineationen im vierdimensionalen Raume, deren Untersuchung bisher der Analysis allein vorbehalten war, der inneren Anschauung zugänglich. Daß die Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz für die nichteuklidische Geometrie von Bedeutung ist, wurde von mir schon kürzlich gezeigt [4]), und ich komme jetzt ausführlich darauf zurück. Die dabei erhaltenen Ergebnisse schaffen die Möglichkeit, die Theorie der involutorischen linearen Strahlenkongruenzen in der vierdimensionalen Welt der Relativitätstheorie zur Anwendung zu bringen, um dadurch manche Resultate der Gravitationstheorie zu der bisher ihnen mangelnden Anschaulichkeit zu erheben. Die von Herrn Einstein gegebene Lösung seiner Feldgleichungen der Gravitation führt auf ein anderes Weltbild als die Lösung des Herrn de Sitter. Die Strukturen beider Weltbilder wurden im Anschluß an die hier entwickelten Theoreme in einer weiteren Abhandlung [5]) abgeleitet.

I. Die analytische Darstellung der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz.

1. Zwei gegebene konjugierte Strahlen einer Involution auf einer linearen Strahlenkongruenz C_l^s mit den (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden s, t werden einander als reziproke Polaren eines polaren Raumes zugeordnet. Demzufolge gibt es zwei Arten von Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz. Die (reelle oder imaginäre) Inzidenzfläche des (reellen) polaren Raumes liegt nämlich entweder einscharig in der linearen Kongruenz, oder sie trägt zwei involutorische Regelscharen des geschart involutorischen Raumes der linearen Kongruenz. Aus diesen Definitionen folgt:

Bestimmt eine Fläche F^2 zweiten Grades mit der Gleichung $\sum_{\varkappa=1}^{4}\sum_{\lambda=1}^{4} a_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa x_\lambda = 0$ *eine Involution auf einer linearen Strahlenkongruenz, so gehen die homogenen Linienkoordinaten p_{ik}, p'_{ik} konjugierter Kongruenzstrahlen g, g' durch lineare involutorische Substitutionen ineinander über, als deren* 36 *Koeffizienten die* 36 *Minoren zweiten Grades aus der symmetrischen Determinante* $|\, a_{\varkappa\lambda}\,|$ *auftreten.*

Die involutorischen Substitutionen sind die folgenden sechs:

$$\begin{aligned}
p'_{12} &= (a_{23}\cdot a_{34} - a_{33}\cdot a_{24})\, p_{23} + (a_{33}\cdot a_{14} - a_{13}\cdot a_{34})\, p_{13} + (a_{13}\cdot a_{24} - a_{23}\cdot a_{14}) p_{12} \\
&\quad + (a_{13}\cdot a_{44} - a_{34}\cdot a_{14})\, p_{14} + (a_{23}\cdot a_{44} - a_{34}\cdot a_{24})\, p_{24} \\
&\quad + (a_{33}\cdot a_{44} - a_{34}^2)\, p_{34} \\
p'_{13} &= (a_{22}\cdot a_{34} - a_{23}\cdot a_{24})\, p_{23} + (a_{23}\cdot a_{14} - a_{12}\cdot a_{34})\, p_{13} + (a_{12}\cdot a_{24} - a_{22}\cdot a_{14})\, p_{12} \\
&\quad + (a_{12}\cdot a_{44} - a_{24}\cdot a_{14})\, p_{14} + (a_{22}\cdot a_{44} - a_{24}^2)\, p_{24} \\
&\quad + (a_{23}\cdot a_{44} - a_{34}\cdot a_{24})\, p_{34} \\
p'_{14} &= (a_{22}\cdot a_{33} - a_{23}^2)\, p_{23} + (a_{23}\cdot a_{13} - a_{33}\cdot a_{12})\, p_{13} + (a_{12}\cdot a_{23} - a_{22}\cdot a_{13})\, p_{12} \\
&\quad + (a_{12}\cdot a_{34} - a_{13}\cdot a_{24})\, p_{14} + (a_{22}\cdot a_{34} - a_{23}\cdot a_{24})\, p_{24} + (a_{23}\cdot a_{34} - a_{33}\cdot a_{24})\, p_{34}
\end{aligned}$$

u. s. f.

Zu diesen Substitutionen treten bei den primären Involutionen [1]) die analytischen Bedingungen dafür, daß die beiden Leitgeraden der Trägerkongruenz zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Regelstrahlen der Fläche F^2 sind, bei den sekundären Involutionen [1])

---

[3]) Haenzel, Theorie und Klassifikation der Kollineationen vermöge der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz, The Tohoku Mathem. Journal **31** (September 1929).

[4]) Haenzel, Die charakteristischen Involutionen der nichteuklidischen Bewegungen, Monatshefte für Mathematik und Physik **37**, 2 (1930).

[5]) Haenzel, Über Lösungen der Gravitationsgleichungen Einsteins, Zeitschr. für Physik **72** (1931), S. 798.

dagegen die analytischen Bedingungen dafür, daß diese beiden Leitgeraden zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) reziproke Polaren der Fläche darstellen. Im folgenden läßt sich dieser Zusammenhang in beiden Fällen auf zweierlei Weise sehr einfach zeigen.

2. Eine allgemeine reelle Kollineation im dreidimensionalen Raum wird mittels homogener Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 durch die Substitution:

$$\text{(I)} \qquad \varrho x_i' = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} x_k, \qquad a_{ik} \text{ reell}, \quad |a_{ik}| \neq 0, \quad i = 1, \ldots, 4,$$

charakterisiert. Die Koordinaten der vier Doppelpunkte der Kollineation gehen in bekannter Weise aus den vier Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ der Determinantengleichung:

$$\Delta(\varrho) \equiv |a_{ik} - \varrho| = 0$$

hervor. Fallen keine zwei Doppelpunkte zusammen und liegen keine drei auf einer Geraden, keine vier in einer Ebene, so sind die vier Punkte die Eckpunkte des Decktetraeders. Bei Benutzung dieses Tetraeders als Koordinatentetraeder werden die drei Gegenkantenpaare $q\,r$, $s\,t$, $u\,v$ des Tetraeders dargestellt durch:

$$\begin{array}{llll} q & x_1 = 0, \; x_2 = 0 & s & x_1 = 0, \; x_3 = 0 \qquad u \quad x_1 = 0, \; x_4 = 0 \\ r & x_3 = 0, \; x_4 = 0 & t & x_2 = 0, \; x_4 = 0 \qquad v \quad x_2 = 0, \; x_3 = 0\,. \end{array}$$

Die drei Gegenkantenpaare geben die Leitgeradenpaare dreier linearer Strahlenkongruenzen C_r^q, C_t^s und C_v^u ab. Sind $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ die bekannten homogenen Linienkoordinaten, so werden die Kongruenzstrahlen von C_r^q, C_t^s und C_v^u durch die drei Gleichungspaare gekennzeichnet:

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{array}{llll} C_r^q & p_{12} = 0 & p_{34} = 0 \\ C_t^s & p_{13} = 0 & p_{24} = 0 \\ C_v^u & p_{14} = 0 & p_{23} = 0\,. \end{array} \right.$$

Die sechs Doppelstrahlen q, r, s, t, u, v bestimmen außerdem die drei einfachen Raumvierseite:

$$stuv \qquad qruv \qquad qrst.$$

Diese drei einfachen Raumvierseite sind die Basisvierseite dreier F^2-Büschel:

$$F^2_{stuv} \qquad F^2_{qruv} \qquad F^2_{qrst}\,.$$

Die drei F^2-Büschel geben mittels eines Parameters λ Anlaß zu den Gleichungen:

$$\text{(III)} \quad x_1 x_2 - \lambda \cdot x_3 x_4 = 0 \qquad x_1 x_3 - \lambda \cdot x_2 x_4 = 0 \qquad x_1 x_4 - \lambda \cdot x_2 x_3 = 0\,.$$

Jede gegebene Fläche F_λ^2 des F^2-Büschels F^2_{stuv} liegt mit ihrer einen Regelschar in der linearen Kongruenz C_t^s, mit der anderen in der linearen Kongruenz C_v^u. Im (reellen) polaren Raume der Fläche F_λ^2 wird jedem gegebenen Kongruenzstrahle der Kongruenz C_t^s ein anderer Strahl dieser Kongruenz als reziproke Polare zugeordnet, und ebenso gehört zu jedem gegebenen Kongruenzstrahle von C_v^u ein zweiter Strahl dieser Kongruenz als reziproke Polare. Auf jeder der beiden linearen Strahlenkongruenzen C_t^s und C_v^u bedingt also die je einscharig in C_t^s und C_v^u enthaltene Fläche F_λ^2 zweiter Ordnung eine involutorische Paarung der Kongruenzstrahlen. Diese geometrisch evidente Tatsache läßt sich auch analytisch leicht verifizieren, wenn man nach Nr. 1 bedenkt, durch welche Substitutionen die Linienkoordinaten p_{ik} eines gegebenen Strahles g in die Linienkoordinaten p'_{ik} seiner reziproken Polare g' im polaren Raume einer Fläche zweiter Ordnung übergehen. Im Falle der Fläche $F_\lambda^2 = x_1 x_2 - \lambda \cdot x_3 x_4 = 0$ zeigt eine leichte Rechnung, daß die Linienkoordinaten zweier solcher reziproker Polaren durch die Substitutionen:

$$\text{(IV)}\quad \left\{\begin{array}{lll} -\frac{\lambda}{4}p_{12}=p'_{34} & +\frac{\lambda}{4}p_{13}=p'_{13} & -\frac{\lambda}{4}p_{14}=p'_{14} \\ -\frac{\lambda^2}{4}p_{34}=p'_{12} & +\frac{\lambda}{4}p_{24}=p'_{24} & -\frac{\lambda}{4}p_{23}=p'_{23} \end{array}\right\}$$

zusammenhängen, deren involutorischer Charakter ersichtlich ist.

Entsprechendes gilt von den beiden übrigen F^2-Büscheln F^2_{qruv} und F^2_{qrst}. Jede Fläche eines dieser beiden Büschel liegt je einscharig in den beiden linearen Kongruenzen, deren Leitgeradenpaare das Basisvierseit ($q\,r\,u\,v$ oder $q\,r\,s\,t$) des F^2-Büschels bilden. Sie bestimmt also auf diesen beiden Kongruenzen eine involutorische Paarung der Kongruenzstrahlen, bei der jedes Strahlenpaar aus zwei reziproken Polaren besteht.

Zusammenfassend läßt sich nunmehr feststellen:

Die ∞^1 Flächen zweiter Ordnung der drei F^2-Büschel:

F^2_{stuv}	F^2_{qruv}	F^2_{qrst}
$x_1x_2-\lambda\cdot x_3x_4=0$	$x_1x_3-\lambda\cdot x_2x_4=0$	$x_1x_4-\lambda\cdot x_2x_3=0$

liegen je einscharig in den linearen Strahlenkongruenzen:

C^s_t	C^u_v	C^q_r	C^u_v	C^s_t	C^q_r
$p_{13}=0$	$p_{14}=0$	$p_{12}=0$	$p_{14}=0$	$p_{13}=0$	$p_{12}=0$
$p_{24}=0$	$p_{23}=0$	$p_{34}=0$	$p_{23}=0$	$p_{24}=0$	$p_{34}=0$.

Sie bestimmen auf diesen Kongruenzen je eine (primäre) Involution der Kongruenzstrahlen, und die Koordinaten konjugierter Strahlen g, g' dieser Involution sind verknüpft durch die Substitution:

$$\text{(V)}\quad \left\{\begin{array}{llll} -\frac{1}{4}p_{12}=p'_{34} & -\frac{1}{4}p_{12}=p'_{34} & -\frac{1}{4}p_{13}=p'_{24} & -\frac{\lambda}{4}p_{12}=p'_{12} \\ -\frac{\lambda}{4}p_{14}=p'_{14} & +\frac{\lambda}{4}p_{13}=p'_{13} & +\frac{\lambda}{4}p_{14}=p'_{14} & -\frac{1}{4}p_{13}=p'_{24} \\ -\frac{\lambda}{4}p_{23}=p'_{23} & +\frac{\lambda}{4}p_{24}=p'_{24} & +\frac{\lambda}{4}p_{23}=p'_{23} & -\frac{\lambda^2}{4}p_{24}=p'_{13} \\ -\frac{\lambda^2}{4}p_{34}=p'_{12} & -\frac{\lambda^2}{4}p_{34}=p'_{12} & -\frac{\lambda^2}{4}p_{24}=p'_{13} & -\frac{\lambda}{4}p_{34}=p'_{34} \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ll} +\frac{\lambda}{4}p_{12}=p'_{12} & -\frac{\lambda}{4}p_{13}=p'_{13} \\ -\frac{1}{4}p_{14}=p'_{23} & -\frac{1}{4}p_{14}=p'_{23} \\ -\frac{\lambda^2}{4}p_{23}=p'_{14} & -\frac{\lambda^2}{4}p_{23}=p'_{14} \\ +\frac{\lambda}{4}p_{34}=p'_{34} & -\frac{\lambda}{4}p_{24}=p'_{24} \end{array}\right\}.$$

Ein polarer Raum, dessen (reelle oder imaginäre) Inzidenzfläche einscharig in einer linearen Kongruenz enthalten ist, heißt ein primärer polarer Raum [1]) der Kongruenz und die durch ihn hervorgerufene Paarung der Kongruenzstrahlen eine primäre Involution auf der Kongruenz. Die obigen Substitutionen sind also explizite Ausdrücke der primären Involution.

3. Die drei linearen Strahlenkongruenzen C^q_r, C^s_t und C^u_v bestimmen bzw. die drei geschart involutorischen Räume Σ_{qr}, Σ_{st} und Σ_{uv} als deren Deckstrahlenkongruenzen. Die zugehörigen geschart involutorischen Kollineationen führen bei der hier getroffenen Wahl des Koordinatentetraeders (2) auf die Substitutionen:

$$\text{(VI)}\quad \left\{\begin{array}{lll} & \Sigma_{qr} & \Sigma_{st} \quad\quad \Sigma_{uv} \\ \varrho x_1=x'_1 & \varrho x_1=x'_1 & \varrho x_1=x'_1 \\ \varrho x_2=x'_2 & \varrho x_2=-x'_2 & \varrho x_2=-x'_2 \\ \varrho x_3=-x'_3 & \varrho x_3=x'_3 & \varrho x_3=-x'_3 \\ \varrho x_4=-x'_4 & \varrho x_4=-x'_4 & \varrho x_4=x'_4 \end{array}\right\}.$$

Wir erinnern daran, daß diese drei geschart involutorischen Kollineationen vertauschbar sind, daß also aus je zwei von ihnen die dritte resultiert und aus allen dreien die Identität.

Jede Fläche des F^2-Büschels F^2_{stuv} trägt zwei involutorische Regelscharen im geschart involutorischen Raume Σ_{qr} der linearen Strahlenkongruenz C^q_r. Das hat zur Folge, daß umgekehrt die ∞^2 Kongruenzstrahlen von C^q_r paarweise reziproke Polaren für die ∞^1 Flächen des F^2-Büschels F^2_{stuv} sind. Auch der Analytiker wird sich davon leicht überzeugen, wenn er an Hand der Gleichungen (IV) zu einem gegebenen Kongruenzstrahle von C^q_r die reziproke Polare bez. der Flächen $x_1x_2 - \lambda \cdot x_3x_4 = 0$ aufsucht. Werden diese Überlegungen auf die beiden andern F^2-Büschel ausgedehnt, so ergibt sich folgendes Resultat:

Die ∞^1 Flächen des F^2-Büschels:

$$F^2_{stuv} \quad | \quad F^2_{qruv} \quad | \quad F^2_{qrst}$$

tragen je zwei involutorische Regelscharen im geschart involutorischen Raume der linearen Strahlenkongruenz:

$$C^q_r \quad | \quad C^s_t \quad | \quad C^u_v .$$

Der F^2-Büschel bestimmt auf der linearen Strahlenkongruenz eine (sekundäre) Involution. Konjugierte Strahlen g, g' dieser Involution sind reziproke Polaren für alle Flächen des F^2-Büschels, und ihre Koordinaten sind verknüpft durch die Substitutionen:

$$\text{(VII)} \qquad \left\{ \begin{array}{lll} +\frac{\lambda}{4} p_{13} = p'_{13} & -\frac{\lambda}{4} p_{12} = p'_{12} & +\frac{\lambda}{4} p_{12} = p'_{12} \\ -\frac{\lambda}{4} p_{14} = p'_{14} & +\frac{\lambda}{4} p_{14} = p'_{14} & -\frac{\lambda}{4} p_{13} = p'_{13} \\ -\frac{\lambda}{4} p_{23} = p'_{23} & +\frac{\lambda}{4} p_{23} = p'_{23} & -\frac{\lambda}{4} p_{24} = p'_{24} \\ +\frac{\lambda}{4} p_{24} = p'_{24} & -\frac{\lambda}{4} p_{34} = p'_{34} & +\frac{\lambda}{4} p_{34} = p'_{34} \end{array} \right\}.$$

Ein reeller polarer Raum, dessen (reelle oder imaginäre) Inzidenzfläche zwei involutorische Regelscharen im geschart involutorischen Raume einer linearen Strahlenkongruenz trägt, heißt ein sekundärer polarer Raum [1]) der Kongruenz, die durch ihn bestimmte Involution der Kongruenzstrahlen eine sekundäre Involution auf der linearen Strahlenkongruenz. Die Substitutionen (VII) sind also explizite Ausdrücke der sekundären Involutionen.

4. Eine primäre Involution hat die ∞^1 Strahlen einer (reellen oder imaginären) Regelschar zweiter Ordnung zu Doppelstrahlen, deren Trägerfläche die Involution bedingt. Eine sekundäre Involution hat vier (reelle oder konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen [1]). Sie bilden das Basisvierseit des die Involution bedingenden F^2-Büschels. Die analytische Darstellung der primären und der sekundären Involutionen in Nr. 2 und Nr. 3 ging von der Gleichung der Fläche zweiter Ordnung in der Form $x_1x_3 - \lambda \cdot x_2x_4 = 0$ aus, benutzte ein Tangentialtetraeder als Koordinatentetraeder, und dieses enthielt auch die drei Basisvierseite der drei bedingenden F^2-Büschel. Diese Gleichungsform der Fläche zweiter Ordnung gibt aber keine Auskunft darüber, ob ihre Regelstrahlen — und damit die Doppelstrahlen der dargestellten Involutionen — reelle Strahlen, oder konjugiert imaginäre Strahlen erster oder zweiter Art sind. Aus dem F^2-Büschel F^2_{qruv} greifen wir eine Fläche heraus. Ihre Gleichung:

$$x_1x_3 - x_2x_4 = 0$$

geht durch die Substitutionen:

(a) $x_1 = \varrho(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_3) \quad x_2 = -\varrho(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_4) \quad x_3 = \varrho(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3) \quad x_4 = \varrho(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_4)$
(b) $x_1 = \varrho(\mathfrak{x}_1 + i\mathfrak{x}_3) \quad x_2 = -\varrho(\mathfrak{x}_2 + i\mathfrak{x}_4) \quad x_3 = \varrho(\mathfrak{x}_1 - i\mathfrak{x}_3) \quad x_4 = \varrho(\mathfrak{x}_2 - i\mathfrak{x}_4)$
(c) $x_1 = \varrho(\mathfrak{x}_1 + i\mathfrak{x}_3) \quad x_2 = -\varrho(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_4) \quad x_3 = \varrho(\mathfrak{x}_1 - i\mathfrak{x}_3) \quad x_4 = \varrho(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_4)$

über in die Formen:

a) $\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 - \mathfrak{x}_3^2 - \mathfrak{x}_4^2 = 0$ b) $\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 + \mathfrak{x}_4^2 = 0$ c) $\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 - \mathfrak{x}_4^2 = 0$.

a) Im ersten Falle liegt eine reelle Strahlenfläche zweiter Ordnung vor. Die drei linearen Kongruenzen C_r^q, C_t^s und C_v^u, deren Leitgeradenpaare nach wie vor die Gegenkantenpaare eines Tangentialtetraeders bilden, werden dargestellt durch:

(VIII)
$$\begin{array}{ccc} C_r^q & C_t^s & C_v^u \\ \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{p}_{14} + \mathfrak{p}_{23} = 0 \\ \mathfrak{p}_{12} - \mathfrak{p}_{34} = 0 \end{array}\right. & \begin{array}{l} \mathfrak{p}_{13} = 0 \\ \mathfrak{p}_{24} = 0 \end{array} & \left.\begin{array}{l} \mathfrak{p}_{14} - \mathfrak{p}_{23} = 0 \\ \mathfrak{p}_{12} + \mathfrak{p}_{34} = 0 \end{array}\right\}. \end{array}$$

Auf den beiden hyperbolischen linearen Strahlenkongruenzen C_r^q und C_v^u bedingt die Strahlenfläche zweiter Ordnung zwei primäre Involutionen, die vorhin durch die mittlere Kolonne der Gleichungen (V) angegeben wurden. Auf der hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz C_t^s ruft die Fläche eine sekundäre Involution hervor, vorhin die mittelste Spalte der Gleichungen (VII). Jetzt ist ein Polartetraeder zum Koordinatentetraeder geworden, die beiden primären Involutionen auf C_r^q und C_v^u und die sekundäre Involution auf C_t^s legitimieren sich analytisch bzw. durch die Substitutionen:

(IX)
$$\left\{\begin{array}{ccc} C_r^q & C_t^s & C_v^u \\ \varrho\mathfrak{p}_{12} = +\mathfrak{p}'_{34} & \varrho\mathfrak{p}_{12} = +\mathfrak{p}'_{34} & \varrho\mathfrak{p}_{12} = +\mathfrak{p}'_{34} \\ \varrho\mathfrak{p}_{34} = +\mathfrak{p}'_{12} & \varrho\mathfrak{p}_{14} = -\mathfrak{p}'_{23} & \varrho\mathfrak{p}_{34} = +\mathfrak{p}'_{12} \\ \varrho\mathfrak{p}_{13} = -\mathfrak{p}'_{24} & \varrho\mathfrak{p}_{23} = -\mathfrak{p}'_{14} & \varrho\mathfrak{p}_{13} = -\mathfrak{p}'_{24} \\ \varrho\mathfrak{p}_{24} = -\mathfrak{p}'_{13} & \varrho\mathfrak{p}_{34} = +\mathfrak{p}'_{12} & \varrho\mathfrak{p}_{24} = -\mathfrak{p}'_{13} \\ \varrho\mathfrak{p}_{14} = -\mathfrak{p}'_{23} & \mathfrak{p}_{13} \equiv 0 & \varrho\mathfrak{p}_{14} = -\mathfrak{p}'_{23} \\ \varrho\mathfrak{p}_{23} = -\mathfrak{p}'_{14} & \mathfrak{p}_{24} \equiv 0 & \varrho\mathfrak{p}_{23} = -\mathfrak{p}'_{14} \end{array}\right\}.$$

Jede der beiden primären Involutionen hat die Strahlen einer reellen Regelschar zweiter Ordnung zu Doppelstrahlen, die sekundäre Involution hat vier reelle paarweise windschiefe Doppelstrahlen.

b) Die Gleichung stellt eine imaginäre Fläche zweiter Ordnung mit reellem polarem Raume dar. Die drei linearen Kongruenzen C_r^q, C_t^s und C_v^u sind gegeben durch die Gleichungspaare:

(X)
$$\begin{array}{ccc} C_r^q & C_t^s & C_v^u \\ \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{p}_{12} - \mathfrak{p}_{34} = 0 \\ \mathfrak{p}_{14} - \mathfrak{p}_{23} = 0 \end{array}\right. & \begin{array}{l} \mathfrak{p}_{13} = 0 \\ \mathfrak{p}_{24} = 0 \end{array} & \left.\begin{array}{l} \mathfrak{p}_{12} + \mathfrak{p}_{34} = 0 \\ \mathfrak{p}_{14} + \mathfrak{p}_{23} = 0 \end{array}\right\}. \end{array}$$

Auf den beiden elliptischen linearen Kongruenzen C_r^q und C_v^u bestimmt die Fläche je eine primäre Involution, deren Doppelstrahlen je eine imaginäre Regelschar zweiter Ordnung erfüllen. Auf der hyperbolischen linearen Kongruenz C_t^s bedingt sie eine sekundäre Involution, deren vier Doppelstrahlen aus zwei Paaren konjugiert imaginärer Geraden zweiter Art bestehen. Diese drei Involutionen führen auf dieselben Substitutionen der Linienkoordinaten wie im Falle a.

c) Die Fläche ist eine reelle strahlenlose Fläche zweiter Ordnung. Die hyperbolische lineare Strahlenkongruenz, C_t^s, deren Leitgeraden, wie immer, zwei reziproke Polaren der Fläche bilden, ist wiederum dargestellt durch $\mathfrak{p}_{13} = 0$, $\mathfrak{p}_{24} = 0$, und die auf ihr durch die Fläche bedingte sekundäre Involution liefert dieselben Substitutionen

wie im Falle a. Statt der Darstellung der linearen Strahlenkongruenzen C_r^l und C_v^u ergeben sich jedoch zweimal die Doppelgleichungen $\mathfrak{p}_{12} = \mathfrak{p}_{14} = 0$ und $\mathfrak{p}_{23} = \mathfrak{p}_{34} = 0$. Das war auch zu erwarten, da der durch einen gegebenen (reellen) Punkt der (strahlenlosen) Fläche gehende Regelstrahl und der durch denselben Punkt gehende Leitstrahl zwei konjugiert imaginäre Geraden erster Art sind, und q, r, u, v daher niemals die Leitgeraden zweier (reeller) linearer Strahlenkongruenzen abgeben. Die auf C_t^s bedingte sekundäre Involution hat zwei Paare konjugiert imaginärer Geraden erster Art zu Doppelstrahlen.

Die durch die Flächen des F^2-Büschels F^2_{qruv} hervorgerufenen Involutionen auf den drei linearen Strahlenkongruenzen C_r^q, C_t^s, C_v^u sind damit erschöpft. Es bliebe übrig, die durch die Flächen der beiden übrigen F^2-Büschel bedingten Involutionen zu ermitteln und in gleicher Weise zu untersuchen, danach die F^2-Büschel zu spezialisieren, um alle Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz zu bestimmen. Jedoch kann dieses Ziel auf folgendem bequemeren Wege erreicht werden:

II. Die Beziehungen der sekundären Involutionen zur Theorie der Elementarteiler.

5. Da eine primäre Involution auf einer linearen Strahlenkongruenz die Strahlen einer Regelschar zweiter Ordnung zu Doppelstrahlen hat, so liegen auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz zwei Arten von primären Involutionen:

1. Primäre Involutionen, deren ∞^1 Doppelstrahlen eine reelle Regelschar zweiter Ordnung erfüllen,

2. primäre Involutionen, deren ∞^1 Doppelstrahlen eine in zwei reelle Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene Regelschar zweiter Ordnung bilden,

Die elliptische lineare Strahlenkongruenz trägt:

1. primäre Involutionen, deren ∞^1 Doppelstrahlen eine reelle Regelschar zweiter Ordnung erfüllen,

2. primäre Involutionen, deren ∞^1 Doppelstrahlen eine imaginäre Regelschar zweiter Ordnung bilden,

3. primäre Involutionen, deren ∞^1 Doppelstrahlen zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung erfüllen.

Anders die sekundären Involutionen. Die Doppelstrahlen einer sekundären Involution bilden zusammen mit den Leitgeraden der Trägerkongruenz die Deckstrahlen kollinearer Räume (Gleichung I). Deshalb zieht eine Klassifikation der Kollineationen eine Einteilung der sekundären Involutionen nach sich.

Zum analytischen Ausdruck einer gegebenen Kollineation:

$$\varrho x_i = \sum_{k=0}^{r} a_{ik} x'_k \quad \text{mit } |a_{ik}| \neq 0, \ a_{ik} \text{ reell}, \ i = 0, 1, 2, \ldots, r$$

gehört die Determinantengleichung:

$$\Delta(\varrho) \equiv |a_{ik} - \varrho| = 0 .$$

Diese Gleichung habe m verschiedene Wurzeln:

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m .$$

Es werden bezeichnet mit

$$\mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, \ldots, \mu_k^{(i)}$$

der Reihe nach die Multiplizitäten der Wurzel ϱ_i für die Determinante $\Delta(\varrho)$ und für ihre r-, $(r-1)$-, …, $(r - h^i + 2)$-reihigen Minoren. Dabei bedeutet $r - h^i + 1$ den Rang der Determinante $\Delta(\varrho_i)$, der sich aus $\Delta(\varrho)$ ergibt, wenn $\varrho = \varrho_i$ gesetzt wird,

so daß für $\varrho = \varrho_i$ alle $(r - h^i + 2)$-reihigen Minoren und alle Minoren von noch höherer Ordnung verschwinden. Nunmehr setzt man:

$$e_1^{(i)} = \mu_1^{(i)} - \mu_2^{(i)}, \quad e_2^{(i)} = \mu_2^{(i)} - \mu_3^{(i)}, \quad e_3^{(i)} = \cdots, e_{h-1}^{(i)} = \mu_{h-1}^{(i)} - \mu_h^{(i)}, \quad e_h^{(i)} = \mu_h^{(i)}.$$

Die Ausdrücke:

$$(\varrho - \varrho_i)^{e_1^{(i)}}, \quad (\varrho - \varrho_i)^{e_2^{(i)}}, \ldots, (\varrho - \varrho_i)^{e_h^{(i)}}$$

heißen nach Weierstraß die der Wurzel ϱ_i entsprechenden Elementarteiler. Es sind:

$$\begin{matrix} e_1^{(1)}\, e_2^{(1)} \ldots e_h^{(1)} \\ e_1^{(2)}\, e_2^{(2)} \ldots e_h^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ e_1^{(m)}\, e_2^{(m)} \ldots e_h^{(m)} \end{matrix}$$

die Exponenten der zu den Wurzeln von $\Delta(\varrho) = 0$ gehörenden Elementarteiler, und der Inbegriff aller Exponenten in der Anordnung:

$$[(e_1^{(1)}\, e_2^{(1)} \ldots e_h^{(1)})\,(e_1^{(2)}\, e_2^{(2)} \ldots e_h^{(2)}) \ldots (e_1^{(m)} \ldots e_h^{(m)})]$$

heißt die Charakteristik der vorgelegten Kollineation.

6. Unterliegt die gegebene Kollineation der Charakteristik [1111], so hat sie vier Doppelpunkte und vier Doppelebenen. Von den drei durch Gleichungen (VII) charakterisierten sekundär involutorischen Kongruenzen C_r^q, C_t^s, C_v^u hat jede ein anderes Paar Gegenkanten des Decktetraeders zu Leitgeraden und die beiden übrigen Paar Gegenkanten zu Doppelstrahlen. Jede reelle Kante trägt eine Punkt- und eine Ebeneninvolution, deren (reelle oder konjugiert imaginäre) Doppelelemente die beiden mit der Kante inzidenten Ecken und Ebenen des Tetraeders sind. Die Ebeneninvolution der einen Kante ist zur Punktinvolution der gegenüberliegenden Kante perspektiv. Die Kollineation führt diese Ebenen- und Punktinvolutionen in sich über. Konjugierte Strahlen der sekundären Involution schneiden beide Leitgeraden der Trägerkongruenz in zwei Paaren konjugierter Punkte der beiden Punktinvolutionen und liegen in zwei Paaren konjugierter Ebenen der beiden Ebeneninvolutionen. Für die Charakteristik [1111] ist das eine Paar Gegenkanten ein reelles windschiefes Strahlenpaar u, v, die vier übrigen Kanten q, r, s, t bestehen aus zwei Paaren reeller windschiefer oder aus zwei Paaren konjugiert imaginärer windschiefer Strahlen oder aus zwei Paaren konjugiert imaginärer inzidenter Strahlen. Die von u und v getragenen Punktinvolutionen und Ebeneninvolutionen sind im ersten Falle beide hyperbolisch, im zweiten beide elliptisch, im dritten ist die eine hyperbolisch, die andere elliptisch. Im ersten Falle trägt nach (VII) jede der drei hyperbolischen Kongruenzen C_r^q, C_t^s, C_v^u eine sekundäre Involution mit vier reellen Doppelstrahlen. Die Doppelstrahlen sind die beiden Leitgeradenpaare der beiden anderen Kongruenzen. Im zweiten Falle ist die eine Kongruenz C_v^u hyperbolisch und hat zwei Paar konjugiert imaginärer windschiefer Doppelstrahlen q, r und s, t. Die beiden anderen Kongruenzen C_r^q, C_t^s sind elliptisch, und jede von ihnen hat ein Paar reeller Doppelstrahlen (u, v) und ein Paar konjugiert imaginärer windschiefer Doppelstrahlen (s, t oder q, r). Im dritten Falle ist nur eine reelle, und zwar hyperbolische lineare Kongruenz C_v^u vorhanden, und ihre sekundäre Involution besitzt zwei Paar konjugiert imaginärer inzidenter Doppelstrahlen (r, s und q, t).

Für die Charakteristik [211] trägt die eine Kante u eine hyperbolische oder elliptische, die andere v eine parabolische Punktinvolution. Diese Charakteristik führt demnach auf zwei Arten sekundärer Involutionen auf der hyperbolischen linearen Kongruenz C_v^u, nämlich auf die sekundären Involutionen mit zwei reellen oder mit zwei kon-

jugiert imaginären inzidenten Doppelstrahlen, von denen jeder zwei vereinigte Doppelstrahlen darstellt. Die Doppelstrahlen projizieren aus dem Doppelpunkte der parabolischen Involution auf v die beiden Doppelpunkte auf u.

Für die Charakteristik [22] sind die windschiefen Doppelstrahlen u, v zusammengefallen und bilden die vereinigten Leitgeraden einer parabolischen Kongruenz. Die vereinigten Leitgeraden tragen eine hyperbolische oder eine elliptische Punktinvolution. Konjugierte Strahlen der sekundären Involution treffen die vereinigten Leitgeraden in konjugierten Punkten dieser Punktinvolution. Zwei ihrer Doppelstrahlen fallen mit den vereinigten Leitgeraden zusammen, die beiden anderen (reellen oder konjugiert imaginären) windschiefen Doppelstrahlen gehen durch die Doppelpunkte der von den vereinigten Leitgeraden getragenen Punktinvolution. Die letzteren beiden Doppelstrahlen sind die Leitgeraden einer hyperbolischen oder elliptischen linearen Kongruenz, und die von dieser getragene sekundäre Involution hat die vereinigten Leitgeraden $u = v$ zum vierfachen Doppelstrahl.

Die Charakteristik [4] führt zu einer sekundären Involution auf einer parabolischen linearen Kongruenz, deren vier vereinigte Doppelstrahlen mit den vereinigten Leitgeraden zusammenfallen.

Die Charakteristik [(11) 11] kommt den axialen [6]) Kollineationen zu, welche die ∞^1 Punkte eines Doppelstrahles u und die ∞^1 Ebenen des zu u windschiefen Doppelstrahles v zu Doppelelementen haben; außerdem liegen zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Doppelpunkte auf v und gehen zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Doppelebenen durch u. Zwei gegebene konjugierte Strahlen der sekundären Involution auf der linearen Kongruenz C_v^u schneiden einander in einem Punkte von u und treffen v in zwei konjugierten Punkten einer hyperbolischen oder elliptischen Punktinvolution. Die sekundäre Involution heißt unter diesen Umständen inzidentpaarig [1]). Sie besitzt zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlenbüschel erster Ordnung von Doppelstrahlen, deren Strahlen aus den beiden Doppelpunkten M, N der Punktinvolution auf v die Punkte von u projizieren. Andererseits tragen M und N je einen perspektiv involutorischen zentrischen Bündel im geschart involutorischen Raume von C_v^u. Die perspektiv involutorischen Bündel haben bzw. die Ebenen Mu, Nu zu Involutionsebenen und beide die Leitgerade $MN = v$ zur Involutionsachse. Ebenso tragen die beiden Doppelebenen $\nu = Mu$, $\mu = Nu$ je ein perspektiv involutorisches Feld im geschart involutorischen Raume von C_v^u. Die perspektiv involutorischen Felder μ, ν haben bzw. die Punkte N, M zu Involutionszentren, und sie haben beide die Leitgerade $u = \mu\nu$ zur Involutionsachse. Die perspektiv involutorischen Felder μ, ν sind bzw. die Schnitte der perspektiv involutorischen zentrischen Bündel M, N und bilden je mit diesen die beiden zerfallenen involutorischen linearen Kongruenzen $M\mu, N\nu$. Die Charakteristik [(11) 11] führt also auf zwei Arten sekundärer inzidentpaariger Involutionen auf der hyperbolischen linearen Kongruenz, die eine mit zwei reellen, die andere mit zwei konjugiert imaginären Strahlenbüscheln erster Ordnung von Doppelstrahlen und auf eine Art von Involutionen auf der zerfallenen linearen Strahlenkongruenz, bestehend aus den Strahlen eines zentrischen Bündels und eines ebenen Feldes.

Die Charakteristik [2(11)] liefert — wie sich auf gleichem Wege ergibt — eine dritte Art sekundärer inzidentpaariger Involutionen auf der hyperbolischen linearen Kongruenz. Zwei gegebene konjugierte Strahlen schneiden einander in einem Punkte der einen Leitgeraden und schneiden die andere Leitgerade in zwei konjugierten Punkten einer para-

[6]) F. Schur, Mathem. Annalen **19** (1881/82), S. 431.

bolischen Involution. Diese sekundäre inzidentpaarige Involution besitzt daher einen Büschel erster Ordnung von Doppelstrahlen, deren jeder zwei vereinigte Doppelstrahlen darstellt.

Die Kollineationen mit der Charakteristik [(11) (11)] oder [(22)] sind die geschart involutorischen. Die erste Charakteristik führt daher auf die identische Involution auf der hyperbolischen oder elliptischen Kongruenz, die zweite auf die identische Involution auf der parabolischen Kongruenz.

Die Charakteristiken [(111)1] und [(211)] bedingen die perspektiven Kollineationen, sie liefern die identische Involution auf der zerfallenen Kongruenz, wobei im zweiten Falle der Mittelpunkt des zentrischen Bündels in der Trägerebene des ebenen Feldes liegt. Die Charakteristiken [31], [(21)1], [(31)] und [(1111)] liefern keine neuen Beiträge, da ihre Deckelemente keine linearen Kongruenzen bestimmen. Die erhaltenen Resultate lassen sich folgendermaßen zusammenstellen:

Nr.	Charakteristik	Lineare Kongruenz	Doppelstrahlen der Involution			Punktinvolutionen auf den beiden Leitgeraden			
			reelle	konjugiert imaginäre 1. Art	konjugiert imaginäre 2. Art	hyperbolische	parabolische	elliptische	identische
1	[1111]	hyperbolisch	4			2			
2		hyperbolisch		4		1		1	
3		hyperbolisch			4			2	
4		elliptisch	2		2				
5	[211]	hyperbolisch	2 doppelte			1	1		
6		hyperbolisch		2 doppelte			1	1	
7	[22]	parabolisch	2+1 doppelter			1 doppelt zu zählen			
8		parabolisch	1 doppelter		2			1 doppelt zu zählen	
9		hyperbolisch	1 vierfacher				2		
10		elliptisch	1 vierfacher						
11	[4]	parabolisch	1 vierfacher				1 doppelt zu zählen		
12	[(11) 11]	hyperbolisch	$2 \times \infty^1$			1			1
13		hyperbolisch		$2 \times \infty^1$				1	1
14		zerfallen	$2 \times \infty^1$			1			1
15	[2(11)]	hyperbolisch	$1 \times \infty^1$, jeder doppelt zu zählen				1		1
16	[(11)(11)]	hyperbolisch	Identische Involutionen auf linearen Kongruenzen						2
17		elliptisch							
18	[(22)]	parabolisch							1 doppelt zählende
19	[(111)1]	zerfallen							
20	[(211)]	zerfallen							

7. Die (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelstrahlen einer sekundären Involution auf einer linearen Kongruenz und die Leitgeraden dieser linearen Kongruenz sind nach Nr. 6 stets auch die Doppelstrahlen zweier kollinearer Räume Σ, Σ'. Diese Doppelelemente der beiden kollinearen Räume sind durch die sekundäre Involution bestimmt. Es können dann aber noch einem gegebenen Punkte P von Σ die ∞^3 Punkte von Σ' als homologe Punkte oder einer gegebenen Ebene π von Σ die ∞^3 Ebenen von Σ' als homologe Ebenen zugeordnet werden. Demnach führen ∞^3 Kollineationen eine gegebene sekundäre Involution in sich über, indem sie ihre Doppelstrahlen in Ruhe lassen und je zwei konjugierte Strahlen der Involution wieder in zwei konjugierte verwandeln. Die sekundäre Involution heißt dann die charakteristische Involution [3]) der kollinearen Räume. Die zugehörige lineare Mannigfaltigkeit von ∞^3 kollinearen Räumen ist zu sich selbst dual und heißt ein Gebüschverband kollinearer

Räume [7]). Die Kollineation zweier gegebener Räume des Gebüschverbandes ist bestimmt durch die charakteristische Involution und durch irgendein Paar homologer Punkte oder Ebenen [3]). Kurzum:

Eine sekundäre Involution auf einer linearen Strahlenkongruenz bestimmt einen Gebüschverband kollinearer Räume als deren charakteristische Involution. Die ∞^3 Kollineationen des Gebüschverbandes haben die Leitgeraden der Kongruenz und die Doppelstrahlen der charakteristischen Involution zu Deckstrahlen und führen die charakteristische Involution in sich über.

Das Verhältnis zweier verschiedener Wurzeln der Determinantengleichung $\Delta(\varrho) \equiv |a_{ik} - \varrho| = 0$ ist eine absolute Invariante der Kollineation (5) und stellt sich dual in zweifacher Weise dar, als Doppelverhältnis von zwei homologen Punkten und den Schnittpunkten ihrer Verbindungsgerade mit zwei Seiten des Decktetraeders oder als Doppelverhältnis von zwei homologen Ebenen und den Verbindungsebenen ihrer Schnittgerade mit zwei Ecken des Decktetraeders. Die allgemeine Kollineation mit der Charakteristik [1111] hat drei voneinander unabhängige absolute Invarianten. Durch die charakteristische Involution eines Gebüschverbandes kollinearer Räume ist das Decktetraeder der kollinearen Räume gegeben, und man erhält die ∞^3 Räume des Gebüschverbandes dadurch, daß die drei absoluten Invarianten nacheinander alle möglichen reellen Werte annehmen.

Die drei Gruppen der Zeilen 1–4, 7–10 und 12–14 in der Tabelle der sekundären Involutionen und die Ausführungen dieser und der vorhergehenden Nummer ergeben nunmehr die drei Sätze:

Hat die Kollineation zweier Räume eine charakteristische Involution mit vier paarweise windschiefen Doppelstrahlen (Charakteristik [1111]*), so führt sie noch zwei weitere sekundäre Involutionen auf zwei linearen Kongruenzen in sich über. Von den drei linearen Kongruenzen hat jede ein Paar Gegenkanten des Decktetraeders zu Leitgeraden, die auf der Kongruenz liegende sekundäre Involution hat die beiden übrigen Gegenkantenpaare zu Doppelstrahlen. Jede der drei sekundären Involutionen kann als charakteristische Involution der Kollineation gelten und bestimmt in derselben Weise die beiden übrigen Involutionen. Hat die Kollineation aber eine charakteristische Involution mit zwei Paar konjugiert imaginären Doppelstrahlen erster Art (Zeile 2), so existiert keine weitere charakteristische Involution.*

Hat die Kollineation zweier Räume eine charakteristische Involution mit zwei windschiefen (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelstrahlen auf einer parabolischen linearen Kongruenz, so führt sie noch eine zweite sekundäre Involution auf einer hyperbolischen oder elliptischen linearen Kongruenz in sich über. Diese sekundäre Involution hat die vereinigten Leitgeraden der parabolischen Kongruenz zum vierfachen Doppelstrahl, und ihre Trägerkongruenz hat die Doppelstrahlen jener charakteristischen Involution zu Leitgeraden. Jede der beiden sekundären Involutionen kann als charakteristische Involution der Kollineation gelten.

Hat eine Kollineation zweier Räume eine sekundäre inzidentpaarige Involution auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz zur charakteristischen Involution, so führt sie noch zwei Involutionen auf zwei zerfallenen linearen Kongruenzen in sich über. Jede der drei Involutionen kann als charakteristische Involution gelten.

III. Die sekundären Involutionen und die nichteuklidischen Maßbestimmungen.

8. Auf die Form $x_1 x_4 - \lambda_0 x_2 x_3 = 0$ kann die Gleichung jeder imaginären Fläche zweiter Ordnung mit reellem polarem Raume, jedes Strahlenhyperboloides, strahlenlosen

[7]) Jolles, Invarianz und Umkehrung, Crelle **149** (1919), S. 43.

Hyperboloides und jedes Ellipsoides gebracht werden. Liegt eine solche Fläche als Fundamentalfläche der Maßbestimmung im nichteuklidischen Raume zugrunde, so führt jede Bewegung in diesem Raume die Fläche beidscharig in sich über und hat deren zwei Leitstrahlen q, r und zwei Regelstrahlen s, t zu Doppelstrahlen. Die Diagonalen u, v des Raumvierseites $q\,r\,s\,t$ sind gleichfalls Doppelstrahlen der Bewegung und die Leitgeraden einer linearen Kongruenz C_v^u. Die sekundäre Involution auf C_v^u:

$$p_{14} = p_{23} = 0, \quad +\frac{\lambda}{4}\,p_{12} = p'_{12}, \quad -\frac{\lambda}{4}\,p_{13} = p'_{13}, \quad -\frac{\lambda}{4}\,p_{24} = p'_{24}, \quad +\frac{\lambda}{4}\,p_{34} = p'_{34}$$

ist die charakteristische Involution der nichteuklidischen Bewegung. Auch die beiden mitbestimmten sekundären Involutionen auf C_r^q und C_t^s (Nr. 3, Gleichungen VII, und Nr. 7) gehen durch die Bewegung in sich über. Konjugierte Strahlen der charakteristischen Involution auf C_v^u sind reziproke Polaren für die ∞^1 Flächen des F^2-Büschels:

$$F^2_{qrst} \qquad x_1 x_4 - \lambda \cdot x_2 x_3 = 0, \qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty.$$

Jede Fläche des F^2-Büschels wird durch die Bewegung beidscharig in sich übergeführt.

9. Geht die Koordinatenbestimmung im elliptischen Raume von einem Polartetraeder seiner imaginären Fundamentalfläche aus, so ist deren Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$. Eine Bewegung im elliptischen Raume hat ein Paar reziproke Polaren u, v der Fundamentalfläche zu reellen Doppelstrahlen, die Leitstrahlen q, r und die Regelstrahlen s, t der Fundamentalfläche sind konjugiert imaginäre windschiefe Doppelstrahlen. Mit anderen Worten:

Die allgemeine Bewegung im elliptischen Raume hat drei charakteristische Involutionen, die eine liegt auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz C_v^u, die beiden anderen auf zwei elliptischen linearen Kongruenzen C_r^q und C_t^s.

Die Bewegung läßt sich in zwei elliptisch gescharte Kollineationen zerlegen, von denen die eine C_r^q, die andere C_t^s zur Deckstrahlenkongruenz hat. Die beiden gescharten Kollineationen werden als (elliptische) Parallelverschiebungen erster und zweiter Art bezeichnet. Die Kongruenzstrahlen von C_r^q und C_t^s sind bzw. die Cliffordschen Parallelen erster und zweiter Art. Nunmehr ergeben sich alle Eigenschaften der Cliffordschen Flächen von selbst:

Liegt auf der hyperbolischen linearen Kongruenz C_v^u die charakteristische Involution einer elliptischen Bewegung, so werden die beiden mitbestimmten elliptischen linearen Kongruenzen von den Cliffordschen Parallelen erster und zweiter Art erfüllt. Die ∞^1 je einscharig in C_r^q und C_t^s liegenden Flächen des F^2-Büschels F^2_{qrst} sind Cliffordsche Flächen, gescharte (und insbesondere geschart involutorische) Kollineationen mit den Deckstrahlenkongruenzen C_r^q und C_t^s sind Parallelverschiebungen erster und zweiter Art. Da zwei solche untereinander vertauschbar sind (Gleichungen VI), *so haben die Cliffordschen Flächen die Krümmung Null.*

Die Gleichungen der reellen Cliffordschen Flächen können mit Hife eines Parameters $\varkappa$ auf die Form gebracht werden: $(x_1^2 + x_2^2)(1 - \varkappa) - (x_3^2 + x_4^2)(1 + \varkappa) = 0$.

Der hyperbolische Raum hat eine reelle strahlenlose Fundamentalfläche. Die hyperbolische Bewegung besitzt nur eine charakteristische Involution mit zwei Paar konjugiert imaginären inzidenten Doppelstrahlen (4, c), und es entfällt daher die Möglichkeit, die Bewegung in zwei reelle Parallelverschiebungen zu zerlegen.

10. Eine gegebene sekundäre Involution auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz C_v^u läßt sich in zwei sekundäre inzidentpaarige Involutionen auf C_v^u zerlegen. Diese beiden inzidentpaarigen Involutionen sollen die „Komponenten“ jener „resul-

tierenden" sekundären Involution heißen. Die konjugierten Strahlen der einen Komponente treffen einander auf der Leitgeraden u und schneiden die Leitgerade v in konjugierten Punkten derselben Punktinvolution wie die konjugierten Strahlen der resultierenden Involution. Für die konjugierten Strahlen der zweiten Komponente vertauschen die beiden Leitgeraden diese Rollen untereinander. Demnach kann eine gegebene Bewegung im nichteuklidischen Raume mit der charakteristischen Involution auf C_v^u in zwei Bewegungen mit inzidentpaarigen charakteristischen Involutionen auf C_v^u zerlegt werden. Diese beiden Bewegungen sind zwei nichteuklidische Drehungen um die Achsen u und v. Demnach zeigt sich von selbst:

Eine nichteuklidische Bewegung läßt sich in zwei Drehungen um die beiden Leitgeraden ihrer charakteristischen sekundär involutorischen linearen Kongruenz C_v^u zerlegen. Jede der beiden Drehungen hat eine charakteristische inzidentpaarige Involution auf C_v^u, und aus den beiden inzidentpaarigen Involutionen resultiert die charakteristische Involution der resultierenden Bewegung.

Im hyperbolischen Raume mit der reellen strahlenlosen Inzidenzfläche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ lassen sich die ∞^1 Flächen des F^2-Büschels F^2_{qrst}, welche die charakteristische sekundäre Involution auf C_v^u bedingen (I, 3), mit Hilfe eines Parameters $\varkappa$ auf die Form bringen: $(x_1^2 + x_2^2)(1 - \varkappa) - (x_3^2 - x_4^2)(1 + \varkappa) = 0$. Diese Flächen sind nach obigem Satze Rotationsflächen mit den beiden einander (hyperbolisch-) rechtwinklig kreuzenden Rotationsachsen u, v; gehen sie doch durch jede der beiden Drehungen einzeln in sich über. Sie gestatten ∞^2 Bewegungen in sich, sind also Flächen konstanter Krümmung.

IV. Die sekundären Involutionen und die Theorie der Kollineationen im vierdimensionalen Raume.

11. Im Raume W von vier Dimensionen[8]) wird ein dreidimensionaler Raum Σ aus einem gegebenen, nicht in Σ liegenden Punkte S von W durch einen „zentrischen Bündel zweiter Art" projiziert. Nämlich es werden die Punkte, Strahlen und Ebenen von Σ durch die Strahlen, Ebenen und dreidimensionalen Räume des Punktes S angeschnitten. Der zentrische Bündel zweiter Art ist dreidimensional, wenn die Strahlen oder die dreidimensionalen Räume durch S als Elemente zugrunde liegen. Dabei sind zwei gegebene konjugiert imaginäre Ebenen erster Art des zentrischen Bündels S mit zwei konjugiert imaginären Strahlen erster Art des dreidimensionalen Raumes Σ inzident, zwei konjugiert imaginäre Ebenen zweiter Art schneiden den Raum Σ in zwei konjugiert imaginären Strahlen zweiter Art.

Eine allgemeine Kollineation im vierdimensionalen Raume, analytisch gegeben durch die Substitution $\varrho x_i' = \sum_{k=1}^{5} a_{ik} x_k$, $i = 1, \ldots, 5$, a_{ik} reell, bestimmt fünf Doppelpunkte und fünf dreidimensionale Doppelräume. Die Koordinaten der Doppelpunkte gehen aus den Gleichungssystemen hervor, die den voneinander verschiedenen Lösungen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_5$ der Determinantengleichung:

$$\Delta(\varrho) \equiv |a_{ik} - \varrho| = 0$$

---

[8]) Als erster hat wohl Veronese es unternommen, die Geometrie der vier- und mehrdimensionalen Räume streng synthetisch und in voller Allgemeinheit unter Einschluß der euklidischen und nichteuklidischen Metrik aufzubauen (Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten, Deutsch von Schepp, Leipzig 1894). Doch dürfen wir uns im folgenden zunächst noch die Freiheit nehmen, den im vierdimensionalen Raume gebrauchten geometrischen Definitionen und Operationen gegebenenfalls nur analytische Bedeutung beizumessen.

entsprechen. Unter der Voraussetzung, daß niemals in dieser Determinante für irgendeinen der fünf ϱ-Werte die sämtlichen zu den Elementen einer Zeile gehörigen Adjunkten verschwinden, bilden die fünf Deckpunkte die Scheitel eines (vierdimensionalen) „Deckpentaeders". Jedem Scheitel liegt ein von den vier übrigen Deckpunkten bestimmtes Tetraeder „gegenüber". Der durch dieses Tetraeder bestimmte dreidimensionale Deckraum heißt „Seitenraum" oder „Flanke" des Pentaeders. Die zehn Verbindungsgeraden der fünf Scheitel sind die Kanten des Pentaeders, die Ebenen durch je drei Scheitel seine „Schneiden". Von den fünf Flanken des Pentaeders sind vier paarweise reelle oder paarweise konjugiert imaginäre Räume, die fünfte Flanke ist stets ein reeller Deckraum.

Der reelle Deckraum Δ wird durch die Kollineation des vierdimensionalen Raumes W kollinear auf sich bezogen. Sein Decktetraeder enthält ein Paar reeller windschiefer Gegenkanten, während die beiden übrigen Gegenkantenpaare aus reellen oder aus konjugiert imaginären Strahlen bestehen. In der Tat, die vier übrigen dreidimensionalen Doppelräume $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ sind als paarweise reelle oder konjugiert imaginäre Räume die Doppelelemente zweier hyperbolisch- oder elliptisch-involutorischer Raumbüschel erster Ordnung mit den reellen Trägerebenen δ_u und δ_v. Diese beiden Ebenen sind Doppelebenen der Kollineation und schneiden den Deckraum Δ in zwei reellen windschiefen Gegenkanten u, v seines Decktetraeders. Die von δ_u, δ_v getragenen involutorischen Raumbüschel erster Ordnung sind bzw. perspektiv zu zwei involutorischen Ebenenbüscheln erster Ordnung mit den Achsen u, v im Deckraum Δ und daher gleichzeitig mit ihnen hyperbolisch oder elliptisch. Die Strahlen u, v bilden die Leitgeraden einer linearen Kongruenz C_v^u. Die Strahlen von C_v^u sind sekundär involutorisch gepaart: Konjugierte Strahlen der sekundären Involution liegen in konjugierten Ebenen der beiden involutorischen Ebenenbüschel u und v, und durch sie gehen je zwei konjugierte Räume von jedem der beiden involutorischen Raumbüschel δ_u und δ_v. Die Kollineation führt die sekundäre Involution auf C_v^u in sich über und hat ihre Doppelstrahlen sowie die Leitgeraden u, v zu Deckstrahlen. Im (reellen) Deckraume Δ ist die sekundäre Involution auf C_v^u die charakteristische Involution der Kollineation.

Zwei homologe dreidimensionale Räume Σ, Σ' des vierdimensionalen Raumes W schneiden den reellen Deckraum Δ in den homologen Ebenen σ, σ'. Durch die charakteristische sekundäre Involution auf C_v^u und durch die homologen Ebenen σ, σ' ist die Kollineation des Deckraumes Δ bestimmt (7).

Eine gegebene Ebene ξ des Deckraumes Δ ist im vierdimensionalen Raume W die Trägerebene eines Büschels erster Ordnung von dreidimensionalen Räumen. Die ∞^4 dreidimensionalen Räume von W lassen sich auf ∞^3 Raumbüschel erster Ordnung verteilen, deren ∞^3 Trägerebenen die (reellen) Ebenen von Δ sind. Wird durch die kollineare Beziehung im vierdimensionalen Raume W dem gegebenen Raumbüschel erster Ordnung $\xi(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \ldots)$ der Raumbüschel $\xi'(\mathsf{A}', \mathsf{B}', \Gamma', \ldots)$ zugeordnet, so liegen diese beiden Raumbüschel perspektiv, denn sie haben den Deckraum Δ entsprechend gemein. Zwei gegebene Paare homologer Punkte M, N und M', N', die nicht in Δ liegen, werden bzw. mit ξ und ξ' durch die Paare homologer Räume M, N und M', N' der beiden perspektiven Raumbüschel $\xi(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \ldots)$ und $\xi'(\mathsf{A}', \mathsf{B}', \Gamma', \ldots)$ verbunden. Zu jedem Raume des ersten Büschels ist der homologe Raum des zweiten Büschels damit bestimmt. Aus alledem folgt:

Die Kollineation des vierdimensionalen Raumes W ist bestimmt durch die charakteristische sekundäre Involution des (reellen) Deckraumes Δ, durch zwei homologe dreidimensionale Räume Σ, Σ' und durch zwei Paare von homologen Punkten M, N und M', N',

die nicht im Deckraume Δ liegen. Die vier von Δ verschiedenen (reellen oder konjugiert imaginären) Deckräume der Kollineation gehen bzw. durch die vier (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelstrahlen der charakteristischen Involution in Δ und gehen je paarweise durch die beiden Leitgeraden ihrer Trägerkongruenz.

12. In der Flanke Δ des vierdimensionalen Deckpentaeders (11) zeigt sich die Existenz der vier übrigen Flanken durch die vier Ebenen des in Δ liegenden Decktetraeders an. Diese vier Ebenen sind die vier in Δ liegenden Schneiden. Jede von ihnen geht durch eine der beiden Leitgeraden und durch einen der vier Doppelstrahlen der sekundär involutorischen Kongruenz C_v^u. Die übrigen sechs Schneiden des Deckpentaeders gehen je entweder durch eine der beiden Leitgeraden u, v oder durch einen der vier Doppelstrahlen.

Konjugierte Strahlen der charakteristischen Involution auf C_v^u schneiden die Leitgeraden u, v in konjugierten Punkten zweier Punktinvolutionen und werden aus ihnen durch konjugierte Ebenen zweier Ebeneninvolutionen projiziert. Die je von der einen Leitgerade getragene Punktinvolution ist perspektiv zu der je von der anderen Leitgerade getragenen Ebeneninvolution und daher gleichzeitig mit ihr eine hyperbolische, parabolische, elliptische oder identische Involution. Von den zehn Kanten des vierdimensionalen Deckpentaeders fallen sechs mit den beiden Leitgeraden u, v und den vier Doppelstrahlen der sekundär involutorischen Kongruenz C_v^u zusammen. Die vier übrigen Kanten sind bzw. mit den vier Doppelpunkten der von u und v getragenen Punktinvolutionen inzident.

Unter diesen Umständen ist das vierdimensionale Deckpentaeder der Kollineation hinsichtlich seiner reellen und seiner konjugiert imaginären Flanken, Schneiden, Kanten und Ecken bestimmt durch die sekundäre charakteristische Involution auf der linearen Kongruenz C_v^u.

Es sei h die Anzahl der von den Leitgeraden u und v getragenen hyperbolischen Punktinvolutionen ($h = 0, 1, 2$), e die Anzahl der von ihnen getragenen elliptischen Punktinvolutionen ($e = 0, 1, 2$). Die charakteristische Involution besitze r reelle Doppelstrahlen, i konjugiert imaginäre Doppelstrahlen erster Art oder j konjugiert imaginäre Doppelstrahlen zweiter Art. Aus diesen Zahlen ergeben sich die Elemente des Deckpentaeders; es sind nämlich vorhanden:

reelle Flanken und reelle Ecken je ..... $1 + 2h$,
konjugiert imaginäre Flanken und Ecken je ..... $2e$,
reelle Schneiden und Kanten je..... $2(1 + h) + r$,
konjugiert imaginäre Schneiden und Kanten erster Art je ..... $i + 2e$,
konjugiert imaginäre Schneiden und Kanten zweiter Art je ..... j.

Durch diese Formeln sollen jedoch nur allgemeine vierdimensionale Pentaeder gekennzeichnet werden, deren Ecken und Flanken linear voneinander unabhängig bleiben, so daß nie mehr als vier Ecken in einer Flanke liegen usf. — Parabolische Punkt- und Ebeneninvolutionen auf den Leitgeraden u, v ziehen im Pentaeder doppelt zu rechnende Ecken und Flanken nach sich. Desgleichen gehen zweifache oder vierfache Doppelstrahlen der charakteristischen Involution mit den entsprechenden Multiplizitäten in die obigen Formeln ein. Auch die dadurch entstehenden Möglichkeiten sollen hier nicht weiter verfolgt werden.

Eingegangen 22. Dezember 1930.

Über Schiefkörper mit Unterkörpern zweiter Art über dem Zentrum.

Von *Gottfried Köthe* in Münster.

In der vorliegenden Note wird in § 1 ein Beispiel eines Schiefkörpers konstruiert, der einen maximalen kommutativen Unterkörper besitzt, der Erweiterung zweiter Art des Zentrums des Schiefkörpers ist. In § 2 wird der Satz bewiesen, daß jeder Schiefkörper endlichen Ranges über seinem Zentrum einen maximalen kommutativen Unterkörper besitzt, der Erweiterung erster Art des Zentrums ist.

§ 1.

Es sei P_2 der Primkörper der Charakteristik 2, $\mathsf{K} = \mathsf{P}_2(x)$ der Körper der rationalen Funktionen einer Veränderlichen mit Koeffizienten aus P_2.

Wir betrachten das hyperkomplexe System $\mathfrak{S}$ vom Range 4, das den Koeffizientenbereich K und die Basiselemente $1, u, v, uv$ besitzt, deren Multiplikationstafel durch die Relationen

$$u^2 = x, \quad v^2 = x, \quad vu = x + uv$$

vollständig definiert ist.

Man bestätigt durch Ausrechnen, daß die formalen Regeln, speziell das Assoziativgesetz der Multiplikation, erfüllt sind.

Das Element u ist von zweiter Art über $\mathsf{P}_2(x)$. Wenn wir zeigen, daß $\mathfrak{S}$ keine Nullteiler besitzt, muß $\mathfrak{S}$ ein Schiefkörper vom Range 4 mit dem Zentrum K sein, denn der Rang jedes Schiefkörpers über seinem Zentrum ist eine Quadratzahl [1]), muß also, da er jedenfalls > 1 ist, gleich 4 sein. Jeder maximale kommutative Unterkörper hat den Rang 2, also ist $\mathsf{K}(u)$ ein maximaler kommutativer Unterkörper zweiter Art über dem Zentrum K.

Den Beweis, daß $\mathfrak{S}$ keine Nullteiler besitzt, führen wir mit Hilfe der folgenden Darstellung von $\mathfrak{S}$ durch Matrizen zweiten Grades mit Koeffizienten aus $\mathsf{K}(u)$:

$$u \to \begin{pmatrix} u & 0 \\ x & u \end{pmatrix} \quad v \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Es entspricht also dem Element $s = k_1 + k_2 u + k_3 v + k_4 uv$ die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 u & k_3 + k_4 u \\ k_2 x + (k_3 + k_4 u)x & k_1 + k_2 u + k_4 x \end{pmatrix}.$$

Man bestätigt sofort, daß die den Elementen u, v zugeordneten Matrizen wirklich die definierenden Relationen von u und v erfüllen [2]).

---

[1]) Die in dieser Note verwendeten Sätze aus der allgemeinen Theorie der Schiefkörper sind in einer demnächst in der Math. Zeitschrift erscheinenden Arbeit von E. Noether zu finden oder auch in van der Waerden, Moderne Algebra II. Die Anregung zu dem Beispiel in § 1 verdanke ich Fräulein E. Noether.

[2]) Man kommt auf diese Darstellung so: $\mathfrak{S}$ ist $\mathsf{K}(u)$-Linksmodul mit der Basis $1, v$: $\mathfrak{S} = \mathsf{K}(u) + \mathsf{K}(u) \cdot v$.

$\mathfrak{S}$ besitzt keine Nullteiler, wenn für alle $S \neq 0$ die Determinante $|S| \neq 0$ ist. Ist $|S| = 0$ für irgendein S, so können wir die k_i als Polynome in x annehmen. Setzen wir in $|S| = 0$ für u Null ein, so bekommen wir, da mit u auch x Null wird, $(k_1)^2_{x=0} = 0$, also $k_1 = k_1' x$, k_1' ebenfalls Polynom in x. Also ist

$$\begin{vmatrix} k_1' x + k_2 u & k_3 + k_4 u \\ k_2 x + (k_3 + k_4 u)x & k_1' x + k_2 u + k_4 x \end{vmatrix} = 0$$

Ausmultiplizieren gibt

$$(k_2^2 + k_3 k_2 + k_3^2)\, x + (k_1'^2 + k_{14}' + k_4^2)\, x^2 = 0.$$

Setzen wir $k_2 = a_0 + a_1 x + \cdots$, $k_3 = b_0 + b_1 x \cdots$, so folgt, wenn wir in der obigen Gleichung den Koeffizienten von x betrachten, $a_0^2 + a_0 b_0 + b_0^2 = 0$. Das ist, da für a_0 bzw. b_0 nur die Möglichkeiten 0 und 1 bestehen, nur für $a_0 = b_0 = 0$ möglich.

Wir bekommen also, wenn wir $k_2 = k_2' x$, $k_3 = k_3' x$ setzen,

$$(k_2'^2 + k_3' k_2' + k_3'^2)\, x^3 + (k_1'^2 + k_1' k_4 + k_4^2)\, x^2 = 0.$$

Durch Wiederholung des Schlusses für den Koeffizienten von x^2 usf. bekommen wir $k_1' = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, also $S = 0$, q. e. d.

§ 2.

Der Schiefkörper des vorigen Paragraphen besitzt einen maximalen kommutativen Unterkörper, der Erweiterung erster Art des Zentrums ist, nämlich $\mathsf{K}(uv)$; uv ist von erster Art über K, da es der irreduziblen Gleichung $(uv)^2 + xuv + x^2 = 0$ genügt.

Wir zeigen jetzt allgemein: *Jeder Schiefkörper vom Rang p^2, p eine Primzahl, besitzt einen maximalen kommutativen Unterkörper, der Erweiterung erster Art des Zentrums ist.*

$\mathfrak{K}$ sei ein Schiefkörper vom Range p^2, mit dem Zentrum P. Wir nehmen an, $\mathfrak{K}$ besitze nur Elemente zweiter Art über dem Zentrum. k_1 sei ein Element aus $\mathfrak{K}$, $x^p - \sigma = 0$ sei die irreduzible Gleichung zweiter Art, der es genügt. Es gibt zu k_1 ein von k_1 verschiedenes, zu k_1 konjugiertes, aber nicht damit vertauschbares Element k_2, denn ein von k_1 verschiedenes, konjugiertes Element k_2 kann nicht in $\mathsf{P}(k_1)$ liegen, $\mathsf{P}(k_1)$ ist aber ein maximaler kommutativer Unterkörper, daher ist k_1 nicht mit k_2 vertauschbar.

Wir bilden mit einem beliebigen ϱ aus P

$$\begin{aligned}(k_1 + \varrho k_2)^p = k_1^p &+ \\ &+ \varrho(k_1^{p-1} k_2 + k_1^{p-2} k_2 k_1 + \cdots + k_2 k_1^{p-1}) \\ &+ \varrho^2(k_1^{p-2} k_2^2 + \cdots + k_2^2 k_1^{p-2}) + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \varrho^{p-1}(k_1 k_2^{p-1} + \cdots + k_2^{p-1} k_1) + \\ &+ \varrho^p k_2^p.\end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Klammern $(k_1^{p-1} k_2 + \cdots + k_2 k_1^{p-2}), \ldots, (k_1 k_2^{p-1} + \cdots + k_2^{p-1} k_1)$ der Reihe nach mit $l_1, l_2, \ldots, l_{p-1}$.

P besitzt als unvollkommener Körper unendlich viele Elemente. Sind $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1}$ $p-1$ verschiedene Elemente ungleich Null aus P, so bekommen wir durch Bilden von $(k_1 + \varrho_i k_2)^p$ die Gleichungen

---

$\mathfrak{S}$ ist andrerseits $\mathfrak{S}$-Rechtsmodul. Also ist $\mathfrak{S}$ Darstellungsmodul von sich selbst in bezug auf $\mathsf{K}(u)$. Die so entstehende Darstellung ist genau die obige; denn man bekommt für u und v:

$$\begin{array}{l|l} 1 \cdot u = u \cdot 1 + 0 \cdot v & 1 \cdot v = 0 \cdot 1 + 1 \cdot v \\ v \cdot u = x \cdot 1 + u \cdot v & v \cdot v = x \cdot 1 + 0 \cdot v. \end{array}$$

$$l_1 + \varrho_1 l_2 + \cdots + \varrho_1^{p-2} l_{p-1} = \alpha_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l_1 + \varrho_{p-1} l_2 + \cdots + \varrho_{p-1}^{p-2} l_{p-1} = \alpha_{p-1},$$

die α_i aus P. Die Koeffizientenmatrix $\mathfrak{R}$ der l_i, besitzt eine Inverse $\mathfrak{R}^{-1}$. Nennen wir die Spalte, die aus den l_i bzw. α_i besteht, $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{A}$, so haben wir die Gleichung $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{R}\mathfrak{L} = \mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{A}$, also sind sämtliche l_i Elemente aus P, d. h. es bestehen Beziehungen

$$k_1^{p-1} k_2 + k_1^{p-2} k_2 k_1 + \cdots + k_2 k_1^{p-1} = \sigma_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{1}$$
$$k_1 k_2^{p-1} + k_2 k_1 k_2^{p-2} + \cdots + k_2^{p-1} k_1 = \sigma_{p-1}.$$

Können wir zeigen, daß sogar alle $\sigma_i = 0$ sind, so sind wir fertig, da dann $(k_1 - k_2)^p = k_1^p - k_2^p = \sigma - \sigma = 0$ wäre, was im Widerspruch zum Fehlen von Nullteilern in $\mathfrak{K}$ ist.

Wir betrachten das Element $(k_1^{p-1} k_2)^p = k_1^{p-1} k_2 k_1^{p-1} k_2 \cdots k_1^{p-1} k_2 = \beta$ aus P. Aus der ersten Gleichung (1) berechnen wir $k_2 k_1^{p-1}$ und setzen dies für den ersten solchen Faktor links ein. Wir bekommen $(k_1^{p-1} k_2)^p = -\sigma(k_1^{p-2} k_2^2 + \cdots + k_2 k_1^{p-2} k_2)(k_1^{p-1} k_2)^{p-2} + \sigma_1 (k_1^{p-1} k_2)^{p-1}$. Der Koeffizient von $(k_1^{p-1} k_2)^{p-2}$ ist ein Teil der linken Seite der zweiten Relation (1). Er umfaßt nämlich alle Summanden, in denen k_2 als letzter Faktor rechts steht.

Ersetzen wir den Faktor von $(k_1^{p-1} k_2)^{p-2}$ nach der zweiten Relation (1), so bekommen wir

$$(k_1^{p-1} k_2)^p = \sigma^2 (k_1^{p-3} k_2^3 + \cdots + k_2^2 k_1^{p-3} k_2)(k_1^{p-1} k_2)^{p-3} - \sigma\sigma_2 (k_1^{p-1} k_2)^{p-3} + \sigma_1 (k_1^{p-1} k_2)^{p-1}.$$

Setzen wir dieses Verfahren fort, so kommen wir schließlich auf die Beziehung

$$(k_1^{p-1} k_2)^p = (-1)^{p-2} \sigma^p \pm \sigma^{p-1} \sigma_{p-1} (k_1^{p-1} k_2) \pm \cdots + \sigma_1 (k_1^{p-1} k_2)^{p-1}.$$

Nun ist $k_1^{p-1} k_2$ ein Element, das nicht im Zentrum liegt, denn daraus würde folgen $k_1 k_1^{p-1} k_2 = \varrho k_1 = \sigma k_2$, was unmöglich ist. $k_1^{p-1} k_2$ ist daher Element zweiter Art über P. Daraus folgt $\sigma_i = 0$.

Ist $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Schiefkörper endlichen Ranges über dem Zentrum P, so führen wir diesen Fall auf den eben bezeichneten in folgender Weise zurück:

Wir machen die Annahme, daß es keinen maximalen kommutativen Unterkörper von $\mathfrak{K}$ gibt, der Erweiterung erster Art von P ist. Es sei $\mathfrak{Z}$ ein maximaler kommutativer Unterkörper von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{S}$ der eindeutig bestimmte größte Unterkörper von $\mathfrak{Z}$, der erster Art über P ist, und es sei $[\mathfrak{Z} : \mathfrak{S}] = p' > 1$, und es gebe keinen maximalen kommutativen Unterkörper von $\mathfrak{K}$, für den die entsprechende Zahl p' kleiner ist.

Jedes Element von $\mathfrak{Z}$, das nicht in $\mathfrak{S}$ liegt, ist p^e-te Wurzel eines Elementes aus $\mathfrak{S}$. Daraus folgt die Existenz eines Körpers $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{T} < \mathfrak{Z}$, $[\mathfrak{Z} : \mathfrak{T}] = p$. Nach der allgemeinen Theorie der Schiefkörper gibt es einen Unterschiefkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$, der $\mathfrak{T}$ als Zentrum besitzt und vom Range p^2 über $\mathfrak{T}$ ist. $\mathfrak{L}$ erfüllt die Voraussetzungen unseres eben abgeleiteten Satzes, also gibt es einen kommutativen Unterkörper $\mathfrak{Z}'$ von $\mathfrak{L}$, der erster Art über $\mathfrak{T}$ ist. $\mathfrak{Z}'$ ist auch Unterkörper von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{Z}'$ besitzt über $\mathfrak{S}$ in einem geeigneten Erweiterungskörper wenigstens einen von der Identität verschiedenen Automorphismus, der größte Unterkörper erster Art von $\mathfrak{Z}'$ muß also ein echter Oberkörper $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ sein, d. h. $[\mathfrak{Z}' : \mathfrak{S}'] < p'$, was ein Widerspruch ist. Damit ist bewiesen:

Jeder Schiefkörper endlichen Ranges über dem Zentrum besitzt wenigstens einen maximalen kommutativen Unterkörper, der Erweiterung erster Art des Zentrums ist.

Eingegangen 27. Februar 1931.

Ein Beitrag zur Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ mittels Greenscher Funktionen.

Von *Heinrich Jung* in Göttingen.

Die Methode der Greenschen Funktionen, die bei den Randwertaufgaben der Potentialtheorie eine große Rolle spielt, läßt sich bekanntlich auch bei der Lösung der entsprechenden Randwertprobleme der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ anwenden. Es sind hier im wesentlichen zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich ob k ein Eigenwert dieser Differentialgleichung ist oder nicht [1]). *Ist k kein Eigenwert*, d. h. existiert bei gegebenem k keine stetige Lösung der Differentialgleichung, die die zu dem behandelten Problem gehörige homogene Randbedingung befriedigt (Normallösung), *so läßt sich* auf dieselbe einfache Weise wie bei der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie *eine Greensche Funktion finden*, mit deren Hilfe man die Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ bei einer entsprechenden inhomogenen Randbedingung durch eine einzige Integration bestimmt. Diese Greensche Funktion erfüllt ebenfalls die erwähnte Differentialgleichung sowie die homogene Randbedingung und besitzt in einem Punkt des Grundgebiets die bekannte Unstetigkeit aller Greenschen Funktionen. *Ist k* hingegen *ein Eigenwert, so existiert keine Greensche Funktion der angegebenen Art.* Jedoch lassen sich auch in diesem Fall verallgemeinerte Greensche Funktionen finden, die die entsprechenden Randwertprobleme mit einer einzigen Integration zu lösen gestatten. Fr. Pockels verwendet beispielsweise in diesem Fall Funktionen, die die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und die zugehörige homogene Randbedingung erfüllen, aber in $m + 1$ Punkten des Grundgebiets unstetig sind, wenn m die Anzahl der zu dem betreffenden Eigenwert k und der entsprechenden Randbedingung gehörigen linear unabhängigen Normallösungen ist.

Diese mehrpoligen Greenschen Funktionen kann man vermeiden, wenn man für die Greenschen Funktionen *die Randbedingungen geeignet abändert.* Diesen Weg haben F. Neumann und E. R. Neumann [2]) bei der zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie beschritten, und es soll in den folgenden Untersuchungen gezeigt werden, wie sich diese Methode auf die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ ausdehnen läßt, wenn k ein Eigenwert ist. Es wird sich dann zeigen, daß die zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie einen Spezialfall des hier behandelten allgemeinen Problems darstellt, und zwar für den speziellen Wert $k = 0$ [3]).

Um Komplikationen zu vermeiden, sollen den folgenden Ausführungen nur *einfache, ganz im Endlichen gelegene, mit glatten Rändern versehene* ebene bzw. räumliche

---

[1]) Fr. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, IV. Teil, § 4.

[2]) E. R. Neumann, Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie, Leipzig 1912. — Vgl. auch H. Jung, Die zweiten Greenschen Funktionen als Kerne von homogenen Integralgleichungen zweiter Art, dieses Journal **163** (1930), S. 89.

[3]) $k = 0$ ist ein Eigenwert für die 2. Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n_s} = 0$. Die zugehörige Normallösung ist $u = \text{const}$.

Bereiche zugrunde gelegt werden [4]). Die Berandung des Grundgebiets sei mit s bezeichnet, ihre *innere* Normale mit n_s ,das Grundgebiet selbst mit τ. Die Bedeutung der Differentiale ds, dn_s und $d\tau$ ist dann ohne weiteres verständlich. Tragen Integrale keine nähere Bezeichnung, so sind sie über den ganzen Rand bzw. über das ganze Grundgebiet zu erstrecken.

Das im Text vielfach verwendete Symbol h bedeutet in der Ebene die Zahl 1 und im Raum die Zahl 2.

Vorgelegt sei die Differentialgleichung

(D) $$\Delta u + k^2 u = 0$$

mit der Randbedingung

(R) $$a_s \cdot u_s - b_s \cdot \frac{\partial u}{\partial n_s} = c_s ,$$

worin k und die auf dem Rand s des Grundgebiets definierten Funktionen a_s, b_s und c_s gegeben sind. Ferner soll k ein Eigenwert sein, d. h. es sollen m linear unabhängige, stetige Normallösungen u_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ von (D) existieren, die der homogenen Randbedingung

(R′) $$a_s \cdot u_{\nu(s)} - b_s \cdot \frac{\partial u_\nu}{\partial n_s} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

unterworfen sind [5]).

Dann ergibt die allgemeine Theorie der Differentialgleichung (D), daß durch die Randbedingung (R) die Lösung u nur *bis auf ein additiv hinzutretendes Aggregat der* u_ν mit willkürlichen Koeffizienten bestimmt ist.

Ferner ist zu beachten, *daß die Funktion* c_s *nicht vollkommen willkürlich gewählt werden darf.* Wendet man nämlich den Greenschen Satz

$$\int (\varphi \cdot \Delta\psi - \psi \cdot \Delta\varphi)\, d\tau = -\int \left(\psi_s \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_s} - \varphi_s \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n_s}\right) ds$$

auf das Grundgebiet an, indem für φ die gesuchte Funktion u und für ψ der Reihe nach die Normallösungen u_ν gesetzt werden, so ergibt sich für c_s eine Bedingung, die mit Berücksichtigung von (R) auf die beiden Formen

(c) $$\int \frac{c_s}{a_s} \cdot \frac{\partial u_\nu}{\partial n_s}\, ds = 0 \quad \Big| \quad \int \frac{c_s}{b_s} \cdot u_{\nu(s)}\, ds = 0$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

gebracht werden kann [6]). Hierbei muß allerdings vorausgesetzt werden, daß die in (c) auftretenden Integrale existieren. Die Funktionen a_s und b_s sind dementsprechend zu wählen. Andernfalls hat (c) keinen Sinn. Das gleiche gilt für alle im weiteren Verlauf der Untersuchung auftretenden Integrale, die a_s oder b_s im Nenner enthalten. Sind alle diese Voraussetzungen erfüllt, so gehen die Formeln in der linken Spalte mittels (R′) in die entsprechenden rechts über, und umgekehrt. Jedoch wird hiervon in der weiteren Untersuchung kein Gebrauch gemacht, es werden beide Spalten vollkommen getrennt behandelt. Daher kann man die obigen Voraussetzungen insofern mildern, als man die

---

[4]) Die nähere Präzisierung dieser Begriffe ist den Vorbemerkungen zu meiner früheren Arbeit über zweite Greensche Funktionen zu entnehmen. Dieses Journal **163**, S. 89.

[5]) Es ist hierbei keineswegs notwendig, daß die u_ν normiert und orthogonalisiert sind. Es genügt die lineare Unabhängigkeit.

[6]) Ist k kein Eigenwert, so ist die Lösung u durch (D) und (R) eindeutig bestimmt, und die Funktion c_s unterliegt keiner Beschränkung.

Existenz der entsprechenden Integrale *nur für eine der beiden Spalten* fordert, d. h. nur a_s oder b_s der erwähnten Bedingung (c) unterwirft. *Die zweite Spalte hat dann unter Umständen keinen Sinn.* Dies ist beispielsweise der Fall bei der bekannten ersten und zweiten Randwertaufgabe ($a = 1$, $b \equiv 0$ bzw. $a \equiv 0$, $b = -1$), wobei nur die linke bzw. die rechte Spalte verwendet werden kann.

In der Potentialtheorie finden die Grundlösungen der Laplaceschen Gleichung weitestgehende Verwendung. Bedeutet $E_j^{(i)}$ die Entfernung der Punkte (i) und (j), so sind dies bekanntlich die Funktionen $\ln \frac{1}{E_j^{(i)}}$ (in der Ebene) und $\frac{1}{E_j^{(i)}}$ (im Raum). Die Differentialgleichung (D) besitzt ebenfalls derartige Grundlösungen, und zwar sind dies die Funktionen $-Y_0(k \cdot E_j^{(i)})$ [7]) (in der Ebene) und $\frac{\cos(k \cdot E_j^{(i)})}{E_j^{(i)}}$ (im Raum). Wie man leicht mit Hilfe bekannter Entwicklungen feststellen kann, verhalten sich diese bei unbegrenzt abnehmender Entfernung $E_j^{(i)}$ samt ihren ersten Ableitungen wie die entsprechenden Grundlösungen der Laplaceschen Gleichung, und sie können daher in den folgenden Untersuchungen in derselben Weise wie diese verwendet werden. Sie seien in den weiteren Ausführungeu mit $C_j^{(i)}$ bezeichnet. Es bedeutet also das Symbol $C_j^{(i)}$ in der Ebene die Funktion $-Y_0(k \cdot E_j^{(i)})$ und im Raum die Funktion $\frac{\cos(k \cdot E_j^{(i)})}{E_j^{(i)}}$. Zu beachten ist hierbei, daß $C_j^{(i)}$ *noch von k abhängt*, daß also *zu jedem Wert von k besondere Grundlösungen gehören.*

Wendet man den Greenschen Satz unter Zugrundelegung des Grundgebietes auf die Grundlösung $C_j^{(i)}$ und die Normallösungen u_ν an, wobei der Pol (i) in bekannter Weise durch einen kleinen Kreis bzw. eine entsprechende Kugel auszuschließen ist, so ergibt sich unter Beachtung von (R′):

$$\text{(C)} \qquad \int \left(C_s^{(i)} - \frac{b_s}{a_s} \cdot \frac{\partial C_s^{(i)}}{\partial n_s}\right) \cdot \frac{\partial u_\nu}{\partial n_s}\, ds = -2h\pi \cdot u_{\nu(i)} \quad \Big| \quad \int \left(\frac{a_s}{b_s} \cdot C_s^{(i)} - \frac{\partial C_s^{(i)}}{\partial n_s}\right) \cdot u_{\nu(s)}\, ds = -2h\pi \cdot u_{\nu(i)}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Versucht man nun, eine Greensche Funktion zu bestimmen, die die Randbedingung (R′) und die Differentialgleichung (D) erfüllt, welche außerdem in *einem* Pol (i) in bekannterweise unstetig ist, so zeigt es sich, daß man dann mit (C) in Widerspruch gerät. *Durch geeignete Abänderung der Randbedingung* läßt sich dieser jedoch vermeiden.

Es sei $\delta_s^{(i)}$ eine Funktion des Randes und des Pols (i), die den Bedingungen

$$\text{(1)} \qquad \int \frac{\delta_s^{(i)}}{a_s} \cdot \frac{\partial u_\nu}{\partial n_s}\, ds = u_{\nu(i)} \quad \Big| \quad \int \frac{\delta_s^{(i)}}{b_s} \cdot u_{\nu(s)}\, ds = u_{\nu(i)}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

unterworfen ist. Die Integrale auf den linken Seiten der Gleichungen (1) sind in bezug auf den Punkt (i) Normallösungen von (D). Setzt man also $\delta_s^{(i)}$ *als lineares Aggregat der* $u_{\nu(i)}$ an mit Koeffizienten, die ihrerseits Funktionen des Randes sind, d. h.

$$\text{(2)} \qquad \delta_s^{(i)} = \sum_1^m{}_\mu f_{\mu(s)} \cdot u_{\mu(i)},$$

so ist diese Forderung erfüllt. Dann geht (1) über in

[7]) $Y_0(x)$ ist die Besselsche Funktion zweiter Art nullter Ordnung.

$$(1') \quad \int \frac{f_{\mu(s)}}{a_s} \cdot \frac{\partial u_\nu}{\partial n_s}\, ds = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases} \quad \Big| \quad \int \frac{f_{\mu(s)}}{b_s} \cdot u_{\nu(s)}\, ds = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Diese Beziehungen können durch geeignete Wahl der $f_{\mu(s)}$ auf viele Arten erfüllt werden. Es gibt somit unendlich viele Funktionen $\delta_s^{(i)}$ [5]).

Mit Hilfe von $\delta_s^{(i)}$ soll nunmehr eine Funktion $F_j^{(i)}$ bestimmt werden, welche in bezug auf den Punkt (j) die Differentialgleichung (D) befriedigt, bezüglich des Pols (i) und des Aufpunkts (j) im ganzen Grundgebiet stetig ist und außer der Differentialgleichung

$$(3) \qquad \Delta F^{(i)} + k^2 F^{(i)} = 0$$

die Randbedingung

$$(4) \qquad a_s \cdot F_s^{(i)} - b_s \cdot \frac{\partial F^{(i)}}{\partial n_s} = a_s \cdot C_s^{(i)} - b_s \cdot \frac{\partial C^{(i)}}{\partial n_s} + 2h\pi \cdot \delta_s^{(i)}$$

erfüllt. Für diese Funktion ist also speziell

$$c_s = a_s \cdot C_s^{(i)} - b_s \cdot \frac{\partial C^{(i)}}{\partial n_s} + 2h\pi \cdot \delta_s^{(i)}.$$

Beachtet man (C) und (1), so sieht man, daß die der Randfunktion c_s auferlegte Bedingung (c) erfüllt ist. Daraus geht nach allgemeinen Prinzipien hervor, *daß eine solche Funktion $F_j^{(i)}$ wirklich existiert*, daß diese aber durch (3) und (4) nur bestimmt ist *bis auf ein lineares Aggregat der $u_{\nu(j)}$* mit Koeffizienten, die beliebige stetige Funktionen des Pols (i) sein können.

Setzt man nun im Greenschen Satz, indem man ihn auf das Grundgebiet anwendet, für φ die gesuchte Lösung u von (D) und (R), für ψ einmal unter Ausschluß des Pols (i) die Grundlösung $C_j^{(i)}$, das zweitemal die Funktion $F_j^{(i)}$, und subtrahiert man die so erhaltene zweite Gleichung von der ersten, so ergibt sich:

$$(5) \quad \begin{aligned} 2h\pi \cdot u_i &= \int \frac{c_s}{a_s} \cdot \left(\frac{\partial C^{(i)}}{\partial n_s} - \frac{\partial F^{(i)}}{\partial n_s} \right) ds + \\ &\quad + 2h\pi \cdot \int \frac{\delta_s^{(i)}}{a_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial n_s}\, ds \end{aligned} \quad \Big| \quad \begin{aligned} 2h\pi \cdot u_i &= \int \frac{c_s}{b_s} \cdot (C_s^{(i)} - F_s^{(i)})\, ds + \\ &\quad + 2h\pi \cdot \int \frac{\delta_s^{(i)}}{b_s} \cdot u_s\, ds. \end{aligned}$$

Nun sind wegen (2) die Integrale $\int \frac{\delta_s^{(i)}}{a_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial n_s}\, ds$ und $\int \frac{\delta_s^{(i)}}{b_s} \cdot u_s\, ds$ *lineare Aggregate der $u_{\nu(i)}$*. Da eine Lösung der Differentialgleichung (D) mit der Randbedingung (R) nur bis auf ein solches Aggregat bestimmt ist, kann man in (5) *diese Integrale weglassen*, ohne den Charakter von u_i als Lösung von (D) und (R) zu verändern. Dann ist auf der rechten Seite der Gleichung (5) *alles bestimmt bis auf $F_j^{(i)}$*, worin ebenfalls noch ein willkürliches Aggregat der u_ν enthalten ist. Wegen (c) liefert dieses jedoch zu (5) keinen Beitrag, so daß nunmehr u_i *eindeutig* festgelegt ist. Doch sei hierbei ausdrücklich bemerkt, daß man zwei *verschiedene* Funktionen u erhält, je nachdem, ob man $\int \frac{\delta_s^{(i)}}{a_s} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial n_s} ds$

---

[8]) Der Ansatz (2) ist hinreichend, aber nicht ohne weiteres notwendig, damit (1) erfüllt ist. Es treten jedoch später noch schärfere Bedingungen für $\delta_s^{(i)}$ auf, die es wahrscheinlich machen, daß $\delta_s^{(i)}$ ein lineares Aggregat der $u_{\nu(i)}$ sein muß (gewisse Integrale, in denen $\delta_s^{(i)}$ im Integrand auftritt, müssen lineare Aggregate der $u_{\nu(i)}$ sein). Eine genauere Untersuchung dieser Frage lohnt sich hier jedoch nicht. Sollte es andere Funktionen geben, die alle Bedingungen für $\delta_s^{(i)}$ erfüllen und demnach für $\delta_s^{(i)}$ verwendet werden können, so lassen sich die folgenden Betrachtungen leicht auf dieselben ausdehnen.

oder $\int \frac{\delta_s^{(i)}}{b_s} \cdot u_s \, ds$ gleich 0 setzt. Es sei nun diejenige Lösung u der Differentialgleichung (D) und der Randbedingung (R), die die Nebenbedingung

$$(6) \qquad \int \frac{\delta_s^{(i)}}{a_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial n_s} \, ds = 0 \quad \Big| \quad \int \frac{\delta_s^{(i)}}{b_s} \cdot u_s \, ds = 0$$

erfüllt als,

erste kanonische Lösung $u^{(1)}$ | *zweite kanonische Lösung* $u^{(2)}$

von (D) und (R) *in bezug auf* $\delta_s^{(i)}$ bezeichnet [9]). Weiter ergibt sich:

$$(7) \qquad 2h\pi \cdot u_i^{(1)} = \int \frac{c_s}{a_s} \cdot \left(\frac{\partial C^{(i)}}{\partial n_s} - \frac{\partial F^{(i)}}{\partial n_s} \right) ds \quad \Big| \quad 2h\pi \cdot u_i^{(2)} = \int \frac{c_s}{b_s} \cdot (C_s^{(i)} - F_s^{(i)}) \, ds.$$

Daß die kanonischen Lösungen *eindeutig* festgelegt sind, läßt sich auch folgendermaßen leicht einsehen:

Ist $\bar{u}$ eine bestimmte Lösung von (D) und (R), so wird jede andere Lösung dargestellt durch

$$u = \bar{u} + \sum_1^m \alpha_\nu \cdot u_\nu,$$

also

$$u^{(1)} = \bar{u} + \sum_1^m \alpha_\nu^{(1)} \cdot u_\nu, \quad \Big| \quad u^{(2)} = u + \sum_1^m \alpha_\nu^{(2)} \cdot u_\nu,$$

worin die $\alpha_\nu^{(1)}$ und $\alpha_\nu^{(2)}$ Konstanten sind. Mit Hilfe von (2) und (6) ergibt sich hieraus:

$$\int \frac{f_{\mu(s)}}{a_s} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial n_s} \, ds + \sum_1^m \alpha_\nu^{(1)} \cdot \int \frac{f_{\mu(s)}}{a_s} \cdot \frac{\partial u_\nu}{\partial n_s} \, ds = 0 \quad \Big| \quad \int \frac{f_{\mu(s)}}{b_s} \cdot \bar{u}_s + \sum_1^m \alpha_\nu^{(2)} \cdot \int \frac{f_{\mu(s)}}{b_s} \, u_{\nu(s)} \, ds = 0$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

welches mittels (1′) übergeht in

$$\alpha_\nu^{(1)} = -\int \frac{f_{\nu(s)}}{a_s} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial n_s} \, ds \quad \Big| \quad \alpha_\nu^{(2)} = -\int \frac{f_{\nu(s)}}{b_s} \cdot \bar{u}_s \, ds$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, m),$$

wodurch die $\alpha_\nu^{(1)}$ und $\alpha_\nu^{(2)}$ eindeutig bestimmt sind.

$F_j^{(i)}$ war in den obigen Betrachtungen *irgendeine* Lösung von (3) und (4). Bezeichnet man speziell mit

$G_j^{(i)}$ *die erste kanonische Lösung* | $H_j^{(i)}$ *die zweite kanonische Lösung,*

so geht (7) über in

$$(7') \qquad 2h\pi \cdot u_i^{(1)} = \int \frac{c_s}{a_s} \cdot \left(\frac{\partial C^{(i)}}{\partial n_s} - \frac{\partial G^{(i)}}{\partial n_s} \right) ds \quad \Big| \quad 2h\pi \cdot u_i^{(2)} = \int \frac{c_s}{b_s} \cdot (C_s^{(i)} - H_s^{(i)}) \, ds.$$

Nach diesen Formeln kann man $G_j^{(i)}$ und $H_j^{(i)}$ sowie $G_i^{(j)}$ und $H_i^{(j)}$ berechnen, da diese Funktionen die kanonischen Lösungen der Differentialgleichung (3) und der Randbedingung (4) darstellen bzw. durch Vertauschung von Pol und Aufpunkt aus ihnen hervorgehen. Es ergibt sich nach einfachen Überlegungen:

---

[9]) Es sei ausdrücklich bemerkt, daß die durch *verschiedene* Funktionen $\delta_j^{(i)}$ definierten kanonischen Lösungen im allgemeinen *verschieden* sind. Sie unterscheiden sich *durch lineare Aggregate der* u_ν.

$$(8) \qquad G_j^{(i)} - G_i^{(j)} = D_i^{(j)} - D_j^{(i)} \quad | \quad H_j^{(i)} - H_i^{(j)} = P_i^{(j)} - P_j^{(i)},$$

wobei

$$(9) \qquad D_j^{(i)} = \int \frac{\delta_s^{(j)}}{a_s} \cdot \frac{\partial C^{(i)}}{\partial n_s}\, ds \quad \Big| \quad P_j^{(i)} = \int \frac{\delta_i^{(j)}}{b_s} \cdot C_s^{(i)}\, ds$$

ist. Hieraus schließt man, daß $G_j^{(i)}$ und $H_j^{(i)}$ selbst im allgemeinen *nicht symmetrisch* sind in (i) und (j); hingegen erweisen sich die Funktionen

$$G_j^{(i)} + D_j^{(i)} \qquad \text{und} \qquad H_j^{(i)} + P_j^{(i)}$$

als *symmetrisch in Pol und Aufpunkt.* Ferner sei bemerkt, daß wegen (2) $D_j^{(i)}$ und $P_j^{(i)}$ in bezug auf den Punkt (j) *lineare Aggregate der* u_ν sind. Aus (c) ergibt sich dann:

$$(10) \qquad \int \frac{c_s}{a_s} \cdot \frac{\partial D^{(i)}}{\partial n_s}\, ds = 0 \quad \Big| \quad \int \frac{c_s}{b_s} \cdot P_s^{(i)}\, ds = 0.$$

Definiert man also eine Funktion

$$(11) \qquad \mathfrak{G}_j^{(i)} = C_j^{(i)} - \mathfrak{G}_j^{(i)} - D_j^{(i)} \quad | \quad \mathfrak{H}_j^{(i)} = C_j^{(i)} - H_j^{(i)} - P_j^{(i)},$$

welche als

erste Greensche Funktion | *zweite Greensche Funktion*

bezeichnet sein soll, so ist

$$(12) \qquad u_i^{(1)} = \frac{1}{2h\pi} \cdot \int \frac{c_s}{a_s} \cdot \frac{\partial \mathfrak{G}^{(i)}}{\partial n_s}\, ds \quad \Big| \quad u_i^{(2)} = \frac{1}{2h\pi} \cdot \int \frac{c_s}{b_s} \cdot \mathfrak{H}_s^{(i)}\, ds.$$

Hiermit ist das im Anfang gesteckte Ziel erreicht. Es ist nicht nur eine, sondern zwei, und, wenn man die Mannigfaltigkeit der möglichen Festsetzungen von $\delta_s^{(i)}$ berücksichtigt, sind sogar unendlich viele Funktionen gefunden, die die *Differentialgleichung* (D) befriedigen, in nur *einem* Pol (i) die bekannte Unstetigkeit aufweisen, *in Aufpunkt und Pol symmetrisch* sind [10]), und mit deren Hilfe man die gesuchten Lösungen von (D) und (R) bei *beliebiger* Randfunktion c_s *durch eine einzige Integration* bestimmen kann [11]). Die homogene Randbedingung (R′) wird allerdings von den Greenschen Funktionen dieser Art nicht mehr erfüllt.

Benutzt man zur Berechnung einer Lösung u von (D) und (R) *verschiedene* Greensche Funktionen, die durch *verschiedene* Funktionen $\delta_s^{(i)}$ definiert sind, so ergeben sich im allgemeinen auch *verschiedene* Lösungen u. Diese unterscheiden sich *um lineare Aggregate der* u_ν.

Wie oben erwähnt, sind die Funktionen $G_j^{(i)}$ und $H_j^{(i)}$ im allgemeinen *nicht symmetrisch.* Es erhebt sich nun die Frage, *ob man* $\delta_s^{(i)}$ *nicht so wählen kann*, daß sie *symmetrisch* werden. Dies ist nach (8) der Fall, *wenn* $D_j^{(i)}$ *und* $P_j^{(i)}$ *symmetrisch sind.* Letztere Funktionen sind lineare Aggregate der $u_{\nu(j)}$, im Fall der Symmetrie also bilineare Formen der $u_{\nu(i)}$ und $u_{\nu(j)}$. Der Einfachheit halber denke man sich diese auf die Diagonalglieder reduziert, was man im allgemeinen übrigens durch lineare, homogene Transformation der u_ν auch erreichen kann [12]). Wie man leicht sieht, kommt die Symmetrieforderung für $D_j^{(i)}$ und $P_j^{(i)}$ darauf hinaus, die in (2) auftretenden Koeffizienten $f_{\mu(s)}$ so zu bestimmen, daß

---

[10]) Hierdurch rechtfertigt sich nachträglich die zunächst willkürlich erscheinende Hinzufügung von $-D_j^{(i)}$ bzw. $-P_j^{(i)}$ in (11).

[11]) Hierbei muß c_s natürlich die Bedingungen (c) erfüllen.

[12]) Dies ist zulässig, da bezüglich der u_ν nur lineare Unabhängigkeit vorausgesetzt ist.

$$(13) \qquad \int \frac{f_{\mu(s)}}{a_s} \cdot \frac{\partial C^{(i)}}{\partial n_s}\, ds = A_\mu \cdot u_{\mu(i)} \;\Big|\; \int \frac{f_{\mu(s)}}{b_s} \cdot C_s^{(i)}\, ds = B_\mu \cdot u_{\mu(i)}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

ist, worin A_μ und B_μ Konstanten sind. Da die $f_\mu(s)$ schon die Gleichungen (1′) erfüllen müssen, ist es fraglich, ob (13) stets befriedigt werden kann. Dies bedarf noch weiterer Untersuchungen, auf die hier verzichtet werden muß. Im allgemeinen wird es kaum möglich sein, $D_j^{(i)}$ *und* $P_j^{(i)}$ gleichzeitig durch *ein- und dieselbe* Funktion $\delta_s^{(i)}$ symmetrisch zu machen. Doch wird das weiter unten angeführte Beispiel der Kugel zeigen, daß in gewissen Spezialfällen diese Möglichkeit besteht.

Setzt man speziell $a_s \equiv 0$, $b_s = -1$, $k = 0$, so kommt man auf die von F. Neumann, E. R. Neumann und in meinem früheren Aufsatz über zweite Greensche Funktionen behandelte Art der Lösung der *zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie* zurück [13]). Die zum Eigenwert $k = 0$ gehörige Normallösung ist eine Konstante. Es ergeben sich — mit den entsprechenden durch die angegebene Spezialisierung bedingten Vereinfachungen — fast wörtlich dieselben Beziehungen, die oben in der *rechten* Spalte angegeben sind. Da a_s identisch verschwindet, *hat die linke Spalte keinen Sinn.* Eine erste Greensche Funktion gibt es also für die zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie nicht.

Was die Lösung der *ersten* Randwertaufgabe der Potentialtheorie mittels Greenscher Funktionen angeht, so ist diese *kein* Spezialfall unserer Betrachtungen, *da* $k = 0$ für $a_s = 1$ und $b_s \equiv 0$ *kein Eigenwert ist.* Hier erfüllt, wie bekannt, die Greensche Funktion die homogene erste Randbedingung, die in diesem Fall nicht abgeändert zu werden braucht, alles im Einklang mit der schon von F. Pockels eingehend dargestellten allgemeinen Theorie der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$.

Als einfachstes Beispiel für die oben durchgeführten allgemeinen Untersuchungen sei *die Kugel mit dem Radius R* hier kurz behandelt, und zwar seien die Funktionen a_s und b_s *konstant* gleich a und b angenommen und der Einfachheit wegen nur diejenigen Eigenwerte betrachtet, deren zugehörige Normallösung *lediglich vom Abstand des Aufpunkts von dem Mittelpunkt der Kugel* abhängen.

Führt man gewöhnliche Kugelkoordinaten r, ϑ, φ ein, so ergeben sich nach bekannten Methoden die nur von r abhängigen Normallösungen $u_\varkappa$ in der Gestalt

$$(14) \qquad u_\varkappa = \frac{\sin(k_\varkappa r)}{r}\ ^{14}),$$

wobei die zugehörigen Eigenwerte $k_\varkappa$ Wurzeln der Gleichung

$$(15) \qquad (a \cdot R - b) \cdot \sin(k_\varkappa R) + b \cdot k_\varkappa R \cdot \cos(k_\varkappa R) = 0$$

sind, welche sich aus der Randbedingung (R′) leicht herleiten läßt. Wie man sieht, gehört zu jedem solchen Eigenwert nur eine einzige Normallösung.

Es werde den weiteren Betrachtungen ein beliebiger, aber ein für allemal bestimmter von den durch (15) gegebenen Eigenwerten zugrunde gelegt und einfach mit k bezeichnet. Die zugehörige Normallösung sei u_1 genannt. Es ist also

$$(14') \qquad u_1 = \frac{\sin(kr)}{r},$$

worin k eine Lösung von

$$(15') \qquad (a \cdot R - b) \cdot \sin(kR) + b \cdot kR \cdot \cos(kR) = 0$$

---

[13]) E. R. Neumann, Beiträge, und H. Jung, Die zweiten Greenschen Funktionen. — Siehe Fußnote [2]), S. 185.

[14]) $u_\varkappa$ ist hier *nicht normiert.*

darstellt. Bezeichnet $f_{1(s)}$ eine zunächst unbestimmte, auf der Kugelfläche mit dem Radius R ausgebreitete Funktion, so ist, wenn nach (2)

$$\delta_s^{(i)} = f_{1(s)} \cdot u_{1(i)} \tag{16}$$

gesetzt wird, $f_{1(i)}$ den entsprechend spezialisierten Bedingungen (1′) zu unterwerfen. Versucht man, diese Beziehungen (1′) durch eine Konstante f zu befriedigen, so zeigt es sich, daß dies in der Tat möglich ist, und es ergibt sich aus (1′) mit Hilfe von (14′):

$$(17) \quad f = \frac{a}{4\pi \cdot [\sin(kR) - kR \cdot \cos(kR)]} \quad \Big| \quad f = \frac{b}{4\pi R \cdot \sin(kR)}.$$

Nach den früheren allgemeinen Ausführungen müssen diese beiden Ausdrücke für f mittels der der Randbedingung (R′) entsprechenden Beziehung (15′) ineinander übergehen. Wie man leicht nachweisen kann, ist dies wirklich der Fall. Weiter erhält man:

$$(18) \quad \delta_s^{(i)} = \frac{a}{4\pi \cdot [\sin(kR) - kR \cdot \cos(kR)]} \cdot \frac{\sin(kr_i)}{r_i} \quad \Big| \quad \delta_s^{(i)} = \frac{b}{4\pi R \cdot \sin(kR)} \cdot \frac{\sin(kr_i)}{r_i}.$$

Auf die Berechnung der Greenschen Funktionen $\mathfrak{G}_j^{(i)}$ und $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ muß hier verzichtet werden. Hingegen sei noch erwähnt, daß man mittels der in (18) angegebenen Funktion $\delta_j^{(i)}$ die Integrale $D_j^{(i)}$ und $P_j^{(i)}$ gleichzeitig symmetrisch machen kann. Hier liegt also einer der oben erwähnten Spezialfälle vor, in denen die Symmetrisierung der beiden Funktionen $D_j^{(i)}$ und $P_j^{(i)}$, also auch der Funktionen $G_j^{(i)}$ und $H_j^{(i)}$ durch ein- und dieselbe Funktion $\delta_j^{(i)}$ gelingt. Mit Hilfe der leicht auf elementarem Wege zu berechnenden Integrale

$$\int C_s^{(i)}\, ds = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(k \cdot \sqrt{R^2 + r_i^2 - 2Rr_i \cdot \cos\vartheta})}{\sqrt{R^2 + r_i^2 - 2Rr_i \cdot \cos\vartheta}} \cdot R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi =$$

$$= \frac{4\pi R \cdot \cos(kR)}{k} \cdot \frac{\sin(kr_i)}{r_i} = \frac{4\pi R \cdot \cos(kR)}{k} \cdot u_1(i)$$

und

$$\int \frac{\partial C^{(i)}}{\partial n_s}\, ds = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(- \frac{d}{dr} \frac{\cos(k \cdot \sqrt{R^2 + r_i^2 - 2Rr_i \cdot \cos\vartheta})}{\sqrt{R^2 + r_i^2 - 2Rr_i \cdot \cos\vartheta}} \right) \cdot R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi =$$

$$= \frac{4\pi \cdot [\cos(kR) + kR \cdot \sin(kR)]}{k} \cdot \frac{\sin(kr_i)}{r_i} = \frac{4\pi \cdot [\cos(kR) + kR \cdot \sin(kR)]}{k} \cdot u_1(i)$$

ergibt sich nämlich aus (9):

$$(19) \quad \begin{cases} D_j^{(i)} = D_i^{(j)} = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{\cos(kR) + kR \cdot \sin(kR)}{\sin(kR) - kR \cdot \cos(kR)} \cdot \dfrac{\sin(kr_i)}{r_i} \cdot \dfrac{\sin(kr_j)}{r_j} \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{\cos(kR) + kR \cdot \sin(kR)}{\sin(kR) - kR \cdot \cos(kR)} \cdot u_{1(i)} \cdot u_{1(j)} \\ P_j^{(i)} = P_i^{(j)} = \dfrac{1}{k} \cdot \operatorname{cotg}(kR) \cdot \dfrac{\sin(kr_i)}{r_i} \cdot \dfrac{\sin(kr_j)}{r_j} \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{k} \cdot \operatorname{cotg}(kR) \cdot u_{1(i)} \cdot u_{1(j)}, \end{cases}$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Eingegangen 21. März 1931.

Der Hyperkreis und sein Laguerresches Bild.

Von *E. A. Weiss* in Bonn.

Durch die Laguerresche Abbildung wird jedem eigentlichen Punkte (x, y) der komplexen euklidischen Ebene ein geordnetes Paar reeller Punkte, ein „*Pfeil*" zugeordnet: Anfangspunkt (ξ, η) und Endpunkt (ξ', η') dieses Pfeiles werden die reellen Punkte der Links- und Rechtsisotropen durch den abzubildenden Punkt. Konjugiert-komplexe Punkte werden auf entgegengesetzte Pfeile abgebildet. Das Bild eines reellen Punktes ist der reelle Punkt selbst. Setzt man [1]):

$$z = \xi + i\eta, \qquad z' = \xi' + i\eta', \tag{1}$$

so lauten die Abbildungsformeln:

$$2x = z' + \bar{z}, \qquad 2iy = z' - \bar{z}. \tag{2}$$

Eine Kurve, also eine Mannigfaltigkeit von ∞^2 komplexen Punkten (wir zählen *reelle* Parameter), wird durch das Laguerresche Verfahren auf ein System von ∞^2 Pfeilen, also auf eine reelle Punktverwandtschaft $(\xi, \eta) \rightarrow (\xi', \eta')$ abgebildet. Punktverwandtschaften dieser Art, wie sie allgemein mit analytischen Kurven, speziell mit Geraden und Kegelschnitten verbunden sind, hat E. Study ausführlich untersucht [2]). Einer reellen Geraden beispielsweise entspricht die Spiegelung an dieser Geraden.

In der vorliegenden Arbeit soll der Hyperkreis an Hand seines Laguerreschen Bildes untersucht werden.

1. *Hyperkreis und Bildkorrelation.* Hyperkegelschnitte sind zuerst von C. Segre [3]) untersucht worden. Betrachtet man in der Ebene ein Hermitesches Polarsystem:

$$\Sigma a_{ik} x_i \bar{y}_k = 0, \qquad a_{ik} = \bar{a}_{ki} \tag{3}$$

von nicht verschwindender Determinante, ein Polarsystem also, das jedem Punkte $x_1 : x_2 : x_3$ eine Gerade $u_1' : u_2' : u_3'$:

$$u_k' = \Sigma a_{ki} \bar{x}_i \tag{4}$$

zuordnet, so sind vom Standpunkte der projektiven Geometrie aus zwei Fälle zu unterscheiden. Das Polarsystem hat entweder ∞^3 Inzidenzpunkte:

$$\Sigma a_{ik} x_i \bar{x}_k = 0 \tag{5}$$

(Normalform: $x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 - x_3\bar{y}_3$) oder, auch im komplexen Gebiete, keinen Inzidenzpunkt (Normalform: $x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3 = 0$). Nur der erste Fall interessiert hier. Der Ort der Punkte (5) heißt *Hyperkegelschnitt.*

---

[1]) Reelle Größen werden im folgenden mit griechischen, komplexe mit lateinischen Buchstaben bezeichnet, $\bar{z}$ bezeichnet die zu z konjugiert-komplexe Zahl.

[2]) E. Study, Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen. Leipzig, B. G. Teubner. 1911.

[3]) C. Segre, Un nuovo campo di ricerche geometriche. Atti di Torino XXV (1890). Vgl. die Darstellung bei J. L. Coolidge, The Geometry of the Complex Domain. Oxford, 1924.

Ein solcher Hyperkegelschnitt wird durch das Laguerresche Verfahren auf ein System von ∞^3 Pfeilen abgebildet. Jedem beliebigen, als Anfangspunkt gewählten Punkte (ξ, η) entsprechen dabei ∞^1 Endpunkte (ξ', η'), die eine vom Punkte (ξ, η) abhängige Kurve C' erfüllen. Man kann sagen, daß der Hyperkegelschnitt auf die Verwandtschaft abgebildet wird, die jedem Punkte (ξ, η) die von ihm abhängige Kurve C' zuordnet.

Der einfachste Fall tritt dann ein, wenn alle Kurven C' zu Geraden werden und also die genannte Verwandtschaft eine Korrelation ergibt. Um die Bedingung dafür abzuleiten, schreiben wir die Gleichung (5) des Hyperkegelschnittes in inhomogenen Koordinaten $x = x_1 : x_3$, $y = x_2 : x_3$ und ersetzen x und y vermöge (2) durch ihre Ausdrücke in den Koordinaten ξ, η; ξ', η' der Bildpunkte. Soll eine bilineare Relation zwischen den Koordinaten entstehen, so müssen die Koeffizienten der quadratischen Glieder verschwinden:

$$a_{11} + a_{22} = 0, \qquad a_{12} - \bar{a}_{12} = 0. \tag{6}$$

Diese Gleichungen geben andererseits auch die Bedingung dafür an, daß der Hyperkegelschnitt das Paar der absoluten Punkte:

$$(u\,|\,u) = u_1^2 + u_2^2 = 0 \tag{7}$$

enthält. Wir wollen einen solchen Hyperkegelschnitt einen *Hyperkreis* nennen.

1. *Das Laguerresche Bild eines Hyperkegelschnittes ist dann und nur dann eine Korrelation, wenn der Hyperkegelschnitt ein Hyperkreis ist.*

Aus der Mannigfaltigkeit der ∞^8 Hyperkegelschnitte wird durch die Bedingungsgleichungen (6) die Mannigfaltigkeit der ∞^6 Hyperkreise ausgeschieden. Nicht jede der ∞^8 reellen Korrelationen kann daher Bild eines Hyperkreises sein. In der Tat: Das Bild des Hyperkreises [4]):

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}(x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2) + \alpha_{12}(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1) + \alpha_{33}x_3\bar{x}_3 \\ &+ a_{13}x_1\bar{x}_3 + \bar{a}_{13}x_3\bar{x}_1 + a_{23}x_2\bar{x}_3 + \bar{a}_{23}x_3\bar{x}_2 = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

die Korrelation:

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \alpha_{11}\,\xi_1 + \alpha_{12}\,\xi_2 + (\alpha_{13} + \beta_{23})\,\xi_3, \\ \varphi_2' &= \alpha_{12}\,\xi_1 - \alpha_{11}\,\xi_2 + (\alpha_{23} - \beta_{13})\,\xi_3, \\ \varphi_3' &= (\alpha_{13} - \beta_{23})\,\xi_1 + (\alpha_{23} + \beta_{13})\,\xi_2 + \alpha_{33}\,\xi_3, \end{aligned} \tag{9}$$

ist dadurch ausgezeichnet, daß sie aus der uneigentlichen Geraden eine Involution ausschneidet, der das absolute Punktepaar angehört [5]). Eine Korrelation mit dieser Eigenschaft soll *zyklisch* heißen.

2. *Eine Korrelation ist dann und nur dann das Laguerresche Bild eines Hyperkreises, wenn sie zyklisch ist.*

Die Determinante der Korrelation ist gleich der Determinante des Hyperkreises und soll von Null verschieden vorausgesetzt werden. Dem „regulären" Hyperkreis entspricht dann eine reguläre Korrelation.

Durch diese Korrelation wird jedem Punkte ξ eine Gerade φ' zugeordnet. Die ∞^1 Punktepaare, die ξ als Anfangspunkt und einen Punkt ξ' von φ' als Endpunkt haben, stellen die ∞^1 Punkte der Kette [6]) dar, in welcher die durch den Punkt ξ laufende Links-

---

[4]) Wir setzen $a_{ik} = \alpha_{ik} + i\beta_{ik}$ und $\xi = \xi_1 : \xi_3$, $\eta = \xi_2 : \xi_3$. Die Größen $\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$ sind homogene Geradenkoordinaten.

[5]) Obwohl die *Abbildung* nur *eigentliche* Punkte betrifft, machen wir zur einfachen Beschreibung der vorkommenden geometrischen Figuren von den uneigentlichen Elementen Gebrauch.

[6]) „Kette" heißt bekanntlich ein Faden, der mit dem reellen Zug einer reellen Geraden projektiv äquivalent ist.

isotrope den Hyperkreis schneidet. Ebenso wird jeder Geraden φ ein Punkt ξ' zugeordnet. und die Punktepaare, die auf φ ihren Anfangs- in ξ' ihren Endpunkt haben, stellen die Punkte der Kette dar, in welcher die durch den Punkt ξ' laufende Rechtsisotrope den Hyperkreis schneidet.

Eine solche Kette besitzt nur dann einen reellen Punkt, wenn das Bild einen Pfeil mit zusammenfallendem Anfangs- und Endpunkt enthält, wenn also die Gerade φ' durch den Punkt ξ läuft. Dann ist ξ ein Punkt der „Inzidenzkurve" der Korrelation, nämlich der gleichseitigen Hyperbel:

$$(10) \quad \Sigma\alpha_{ik}\,\xi_i\,\xi_k \equiv \alpha_{11}\,(\xi_1^2 - \xi_2^2) + \alpha_{33}\,\xi_3^2 + 2\alpha_{12}\,\xi_1\,\xi_2 + 2\alpha_{13}\,\xi_1\,\xi_3 + 2\alpha_{23}\,\xi_2\,\xi_3 = 0\,.$$

3. *Der Hyperkreis besitzt ∞^1 reelle Punkte. Diese erfüllen eine gleichseitige Hyperbel, die Inzidenzkurve der Bildkorrelation.*

Wir wollen die Inzidenzkurve im folgenden als regulär voraussetzen. Die entsprechende Klassenkurve werden wir mit:

$$(11) \qquad \Sigma\,A_{ik}\,\varphi_i\,\varphi_k = 0$$

bezeichnen. Dann wird der Ort der Geraden, die den Punkten der Inzidenzkurve durch die Korrelation zugeordnet werden:

$$(12) \qquad K \equiv \Sigma A_{ik}\,\varphi_i\,\varphi_k + (\beta_{13}\,\varphi_1 + \beta_{23}\,\varphi_2\,)^2 = 0\,.$$

Er fällt dann und nur dann mit der Hyperbel (11) zusammen, wenn:

$$(13) \qquad \beta_{13}\,\varphi_1 + \beta_{23}\,\varphi_2 \equiv 0 \qquad \{\varphi\}.$$

In diesem Sonderfalle, in welchem der Hyperkreis reell wird und mit jedem Punkte den konjugiert-komplexen enthält, muß die Bildkorrelation zu jedem Pfeile den entgegengesetzten besitzen. Sie wird symmetrisch und reduziert sich auf die Polarität an der Inzidenzkurve.

Im allgemeinen Falle schneidet die Korrelation nur auf den Geraden eines bestimmten Büschels Involutionen aus. Der Scheitel dieses Büschels, der „*Involutionspunkt*", — hier, wo wir es mit einer zyklischen Korrelation zu tun haben — ein uneigentlicher Punkt, hat die Koordinaten:

$$(14) \qquad \beta_{13} : \beta_{23} : 0.$$

4. *Ist der Hyperkreis reell, so ist die Bildkorrelation involutorisch. Der Hyperkreis enthält ∞^3 Paare konjugiert-komplexer Punkte. Im anderen Falle enthält der Hyperkreis nur ∞^2 Paare konjugiert-komplexer Punkte. Die Bildpfeile gehören einem Parallelenbüschel an, dessen Scheitel der Involutionspunkt der Bildkorrelation ist.*

Von jetzt ab setzen wir den Hyperkreis als nicht reell voraus. Über die Lage der ∞^2 Paare konjugiert-komplexer Punkte des Hyperkreises wird dann Satz 8 noch genauere Angaben machen.

2. *Mittelpunkt des Hyperkreises.* Mit Hilfe der Inzidenzhyperbel sind die Reateile α_{ik}, mit Hilfe des Involutionspunktes die Imaginärteile β_{ik} der zum Hyperkreis gehörigen Hermiteschen Form geometrisch gedeutet worden. Durch die Inzidenzhyperbel und den Involutionspunkt ist umgekehrt der Hyperkreis nur bis auf einen Parameter bestimmt. Zur Festlegung dieses Parameters kann der Mittelpunkt m des Hyperkreises dienen. Er wird als Pol der uneigentlichen Geraden erklärt und hat die Koordinaten:

$$(15) \quad m_1 : m_2 : m_3 = \alpha_{12}\,\bar{a}_{23} + \alpha_{11}\,\bar{a}_{13} : \alpha_{12}\,\bar{a}_{13} - \alpha_{11}\,\bar{a}_{23} : -\,(\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2).$$

Als Laguerresches Bild entspricht ihm der „*Mittelpfeil*":

$$(16) \qquad A_{31} \pm (\alpha_{11}\,\beta_{23} - \alpha_{12}\,\beta_{13}) : A_{32} \pm (\alpha_{11}\,\beta_{13} + \alpha_{12}\,\beta_{23}) : A_{33}.$$

Dabei beziehen sich die oberen Vorzeichen auf den Anfangspunkt μ, die unteren auf den Endpunkt μ' des Mittelpfeiles.

Die Koordinaten (16) zeigen:

5. *Der Bildpfeil des Hyperkreismittelpunktes, der „Mittelpfeil", wird von dem Mittelpunkte der Inzidenzhyperbel halbiert. Die Richtung des Mittelpfeiles ist zur Involutionsrichtung konjugiert. Anfangspunkt des Mittelpfeiles ist der Punkt, dem die Bildkorrelation die uneigentliche Gerade zuordnet. Endpunkt des Mittelpfeiles ist der Punkt, in den die uneigentliche Gerade durch die Bildkorrelation transformiert wird.*

Es ist danach klar, daß der Hyperkreis und seine Bildkorrelation durch die Inzidenzhyperbel und den Mittelpfeil (der nur symmetrisch zum Hyperbelmittelpunkt liegen muß) vollständig bestimmt ist: Einem Punkte ξ wird durch die Korrelation eine Gerade zugeordnet, von der man einen Punkt und die Richtung unmittelbar angeben kann. Der Punkt entspricht dem Punkte ξ in der Involution, die auf der durch ξ in der Involutionsrichtung (also in der zur Richtung des Mittelpfeiles konjugierten Richtung) verlaufenden Geraden durch die Hyperbel ausgeschnitten wird. Die Richtung ist konjugiert zu der Richtung der Verbindungslinie von ξ mit dem Anfangspunkte μ.

3. *Schnitt des Hyperkreises mit einer reellen Geraden.* Eine Gerade kann, ganz allgemein, einen Hyperkegelschnitt entweder nicht oder in einem Punkte oder in einer Kette schneiden. Im zweiten Falle heißt sie eine Tangente des Hyperkegelschnittes.

In unserem Falle wird das Bild eines Schnittpunktes des Hyperkreises mit einer reellen eigentlichen Geraden φ ein zu φ spiegelbildlich gelegener Pfeil der Korrelation. Betrachten wir daher eine beliebige zu φ orthogonale Gerade χ. Auf χ wird einerseits durch die Korrelation eine Projektivität, andererseits durch die Spiegelung an φ eine (zentralsymmetrische) Involution ausgeschnitten. Es geschieht (wenn wir zunächst Realitätsbedenken ausschalten) zweimal, daß einem Punkte x von χ in der Projektivität und der Involution ein und derselbe Punkt x' zugeordnet wird. Der Ort für diese Punkte $x = x'$ ist daher eine Kurve 2. Ordnung.

Dem Büschel der Geraden χ gehört nun auch die uneigentliche Gerade an und auf dieser bildet — weil die Korrelation zyklisch ist und die Geraden φ und χ orthogonal sind — das absolute Punktepaar das gesuchte Paar der Punkte $x = x'$. Die der Geraden φ entsprechende Kurve 2. Ordnung enthält also das absolute Punktepaar und ist daher ein Kreis.

So wird jeder Geraden φ unserer Ebene durch Vermittelung der Korrelation ein Kreis K_φ zugeordnet. Ein reeller Punkt ξ von K_φ stellt mit seinem zu φ spiegelbildlich gelegenen Punkte ξ' den Bildpfeil eines Schnittpunktes der Geraden φ mit dem Hyperkreis dar.

Um die Realitätsverhältnisse des Kreises K_φ zu untersuchen, berechnen wir das Radiusquadrat:

$$\frac{-\Sigma A_{ik}\varphi_i\varphi_k + (\beta_{23}\varphi_1 - \beta_{13}\varphi_2)^2}{(\alpha_{11}(\varphi_1^2 - \varphi_2^2) + 2\alpha_{12}\varphi_1\varphi_2)^2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\,. \tag{17}$$

Der Ausdruck zeigt zunächst, daß der der Geraden φ zugeordnete Kreis ausartet, wenn:

$$\alpha_{11}(\varphi_1^2 - \varphi_2^2) + 2\alpha_{12}\varphi_1\varphi_2 = 0\,. \tag{18}$$

Die Gerade hat dann die Richtung einer Hyperbelasymptote, und der Kreis zerfällt in die uneigentliche Gerade und eine hier allein in Betracht kommende eigentliche Gerade durch den eigentlichen Schnittpunkt von φ mit der Hyperbel. Diese Gerade läuft zu φ parallel, wenn φ Asymptote der Hyperbel wird.

Einer Geraden φ, welche nicht eine der Asymptotenrichtungen besitzt, wird weiter ein Kreis zugeordnet, für den das Vorzeichen des Radiusquadrates nur von dem Zähler

des Bruches (17) abhängt. Die Realitätsverhältnisse dieses Kreises werden daher durch die Lage der Geraden φ zu der Kurve 2. Klasse:

$$T \equiv -\Sigma A_{ik}\varphi_i\varphi_k + (\beta_{23}\varphi_1 - \beta_{13}\varphi_2)^2 = 0 \tag{19}$$

bestimmt.

Einer Geraden, welche dieser Kurve angehört, wird ein Kreis mit verschwindendem Radius zugeordnet. Die Korrelation enthält dann nur einen zu φ spiegelbildlich gelegenen Pfeil. Die Gerade φ schneidet daher den Hyperkreis nur in einem Punkte und ist also eine Tangente des Hyperkreises. Wir werden die Kurve (19) daher *Tangentenkurve* des Hyperkreises nennen.

6. *Eine reelle Gerade φ tangiert den Hyperkreis, schneidet ihn oder schneidet ihn nicht, je nachdem sie die Tangentenkurve des Hyperkreises tangiert, schneidet oder nicht schneidet. Im zweiten Falle werden die Punkte der Schnittkette auf ∞^1 Pfeile abgebildet, deren Anfangspunkte einen Kreis K_φ erfüllen. Hat φ die Richtung einer Asymptote, so zerfällt dieser Kreis in eine eigentliche und die uneigentliche Gerade.*

Schneidet die Gerade φ die Inzidenzhyperbel, so enthält sie zwei reelle Punkte des Hyperkreises, schneidet also den Hyperkreis (der φ zugeordnete Kreis enthält die beiden Schnittpunkte) und muß daher auch die Tangentenkurve schneiden. Die Tangentenkurve ist daher, wenn sie überhaupt reelle Punkte besitzt, eine Hyperbel, welche die Inzidenzhyperbel umschließt. Über die Lage und Gestalt der Tangentenkurve gilt aber genauer folgendes:

Zunächst zeigt die Gleichung (19), daß T dem Büschel angehört, das von der Inzidenzhyperbel und dem doppeltgezählten uneigentlichen Punkte β' aufgespannt wird, dessen Richtung zur Involutionsrichtung orthogonal ist. Sie berührt also die Inzidenzhyperbel in den beiden Berührungspunkten der in dieser Richtung an die Inzidenzhyperbel gezogenen Tangenten.

In dem durch diese Forderung bestimmten Büschel von Kurven 2. Klasse ist die Tangentenkurve dadurch ausgezeichnet, daß sie mit der Klassenkurve K der Korrelation, (12), konfokal ist:

$$K + T = (\varphi \mid \varphi)\,(\beta_{13}^2 + \beta_{23}^2)\,. \tag{20}$$

Über die Regularität der Tangentenkurve entscheidet das Verhalten ihrer Determinante Δ. Die Gleichung:

$$\Delta = \frac{|\alpha_{ik}|}{\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2}\Sigma\,\alpha_{ik}\mu_i\mu_k \tag{21}$$

zeigt, wie der Wert dieser Determinante von der Lage des Mittelpfeiles abhängt: Je nachdem μ innerhalb oder außerhalb der Hyperbel liegt, ist $\Delta > 0$ oder $\Delta < 0$. (Für $\mu = m$ wird $\Delta = -|\alpha_{ik}|^2$.) Danach sind folgende Fälle zu unterscheiden:

I. *Der Mittelpfeil liegt außerhalb des Asymptotenwinkels.* Von β' aus laufen zwei reelle Tangenten an die Inzidenzkurve. Ändert der Mittelpfeil bei gleichbleibender Richtung seine Länge, so durchläuft die Tangentenkurve — zweimal (konjugiert-komplexe Hyperkreise haben dieselbe Tangentenkurve) — die Hyperbeln des durch die Inzidenzkurve und das Tangentenpaar bestimmten Büschels. Das Tangentenpaar ist zugleich das Paar der reellen Hyperkreistangenten mit reellen Berührungspunkten.

II. *Der Mittelpfeil liegt auf einer Asymptote.* Grenzfall des vorigen Falles. Die gemeinsamen Tangenten von Inzidenzkurve und Tangentenkurve fallen in einer Asymptote der Inzidenzkurve zusammen. Der Hyperkreis hat eine reelle Asymptote mit reellem Berührungspunkt.

III. *Der Mittelpfeil liegt innerhalb des Asymptotenwinkels.* Die Polare π des Punktes β' schneidet die Inzidenzkurve nicht. Ändert der Mittelpfeil bei gleichbleibender Richtung seine Länge, so durchläuft die Tangentenkurve — als Punktort — einen Teil des durch die Inzidenzkurve und die doppeltzählende Polare π bestimmten Büschels.

$\Delta < 0$, *μ außerhalb der Hyperbel.* Die Tangentenkurve ist eine Hyperbel, die sich mit wachsendem Mittelpfeile von der Inzidenzkurve löst und sich der Polaren π anschmiegt.

$\Delta = 0$, *μ auf der Hyperbel.* Die Tangentenkurve artet als Punktort in die doppeltzählende Polare π aus. π ist die einzige reelle Tangente des Hyperkreises.

$\Delta > 0$, *μ innerhalb der Hyperbel.* Die reguläre Tangentenkurve wird nullteilig. Alle reellen Geraden sind Sekanten des Hyperkreises.

Ein Hyperkreis hat danach entweder ∞^1 reelle Tangenten (die eine Hyperbel umhüllen) oder eine oder keine reelle Tangente. Wir entnehmen unserer Zusammenstellung ferner den Satz:

7. *Ein nicht reeller Hyperkreis hat entweder zwei reelle Tangenten mit reellen Berührungspunkten oder eine reelle Asymptote mit reellem Berührungspunkt oder keine reelle Tangente mit reellem Berührungspunkt.*

Soll die Kette, in der eine reelle Gerade φ den Hyperkreis schneidet, reell sein, also zu jedem Punkte den konjugiert-komplexen enthalten, so muß der φ zugeordnete Kreis K_φ spiegelbildlich zu φ liegen. Sein Mittelpunkt:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= +\beta_{23}\varphi_1^2 - \alpha_{13}\varphi_2^2 + \alpha_{12}\varphi_2\varphi_3 + \alpha_{11}\varphi_3\varphi_1 + (\alpha_{23} - \beta_{13})\varphi_1\varphi_2, \\ \zeta_2 &= -\alpha_{23}\varphi_1^2 - \beta_{13}\varphi_2^2 - \alpha_{11}\varphi_2\varphi_3 + \alpha_{12}\varphi_3\varphi_1 + (\alpha_{13} + \beta_{23})\varphi_1\varphi_2, \\ \zeta_3 &= -\alpha_{11}(\varphi_1^2 - \varphi_2^2) - 2\alpha_{12}\varphi_1\varphi_2 \end{aligned} \tag{22}$$

muß auf φ liegen. Die Gleichung:

$$(\varphi\zeta) = (\varphi \mid \varphi)(\varphi_1\beta_{23} - \varphi_2\beta_{13}) \tag{23}$$

zeigt, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn φ zur Involutionsrichtung orthogonal ist.

8. *Es gibt ∞^1 Geraden, die einen nicht reellen Hyperkreis in einer reellen Kette schneiden: Die reellen Hyperkreissekanten orthogonal zur Involutionsrichtung*[7]).

Auf die ∞^1 Schnittketten verteilen sich die in Satz 4 genannten Paare konjugiert-komplexer Punkte des Hyperkreises.

4. *Der Hyperkreis als geometrischer Ort.* Nach C. Segre ist der Ort aller Punkte x, für die eine lineare Relation mit reellen Koeffizienten γ_i zwischen den Quadraten der absoluten Beträge ihrer Abstände C und D von zwei verschiedenen Geraden $(cx) = 0$ und $(dx) = 0$ besteht:

$$\gamma_1 C\overline{C} + \gamma_2 D\overline{D} = \gamma_3, \tag{24}$$

ein Hyperkegelschnitt[8]). Da die beiden Geraden von 8 Konstanten abhängen und es nur auf die Verhältnisse der drei Koeffizienten γ_i ankommt, enthält die Segresche Konstruktion 10 wesentliche Konstanten. Jeder der ∞^8 Hyperkegelschnitte kann also auf ∞^2 Weisen als geometrischer Ort im angegebenen Sinne aufgefaßt werden. Je zwei beliebige, aber verschiedene, konjugierte Durchmesser des Hyperkegelschnittes können als Geraden c und d gewählt werden.

Unter welchen Umständen liefert nun die Segresche Konstruktion einen Hyperkreis? Berechnen wir die Koeffizienten a_{ik} des durch die Geraden c und d und die Para-

---

[7]) Auch die uneigentliche Gerade, die ja von der Abbildung ausgeschlossen ist, schneidet in einer reellen Kette.

[8]) C. Segre, a. a. O. Nr. 37. Anm.

meter γ_i bestimmten Hyperkegelschnittes und setzen wir die für den Hyperkreis charakteristischen Gleichungen (6) an, so folgt:

$$(25)\qquad \begin{aligned} a_{11} + a_{22} &= \gamma_1 |d| (c_1 \bar{c}_1 + c_2 \bar{c}_2) + \gamma_2 |c| (d_1 \bar{d}_1 + d_2 \bar{d}_2) = 0 , \\ a_{12} - \bar{a}_{12} &= \gamma_1 |d| (c_1 \bar{c}_2 - c_2 \bar{c}_1) + \gamma_2 |c| (d_1 \bar{d}_2 - d_2 \bar{d}_1) = 0 , \end{aligned}$$

wo:

$$(26)\qquad |c| = |c_1^2 + c_2^2| , \qquad |d| = |d_1^2 + d_2^2| .$$

Soll es möglich sein, Größen γ_1 und γ_2 zu finden, die diesen Gleichungen genügen, so muß die Determinante verschwinden:

$$(27)\qquad \frac{c_1 \bar{c}_1 + c_2 \bar{c}_2}{c_1 \bar{c}_2 - c_1 \bar{c}_2} = \frac{d_1 \bar{d}_1 + d_2 \bar{d}_2}{d_1 \bar{d}_2 - d_2 \bar{d}_1} .$$

9. *Eine notwendige Bedingung dafür, daß ein durch die Geraden c und d bestimmter Hyperkegelschnitt ein Hyperkreis wird, besteht darin, daß der Winkel, den die Gerade c mit der konjugiert-komplexen Geraden $\bar{c}$ bildet, gleich dem Winkel ist, den die Gerade d mit der konjugiert-komplexen Geraden $\bar{d}$ einschließt.*

Ist diese Bedingung erfüllt, so können die Größen γ_1 und γ_2 aus (25) berechnet werden. Sie werden entgegengesetzt gleich, wenn die beiden Geraden reelle Richtungen haben. Die Geraden sind dann nicht nur konjugierte Durchmesser des Hyperkreises sondern auch der Inzidenzhyperbel.

10. *Ein Hyperkreis kann auf ∞^1 Weisen als Ort der Punkte beschrieben werden, für welche die Differenz der Quadrate der absoluten Beträge ihrer Abstände von zwei festen Geraden (konjugierten Durchmessern mit reellen Richtungen) konstant ist.*

Die in Satz 10 genannte Differenz soll nun im Laguerreschen Bilde des Hyperkreises sichtbar gemacht werden. Wir beschränken uns dabei auf die reellen Punkte des Hyperkreises, also auf die Punkte der Inzidenzhyperbel.

Zunächst zwei Vorbemerkungen! Die erste betrifft das Laguerresche Bild einer imaginären Geraden mit reeller Richtung. Dies Bild ist eine Umlegung, die aus der Spiegelung an einer reellen Geraden und einer Schiebung längs dieser Geraden zusammengesetzt werden kann [9]).

In unserem Falle werden zwei reell-gerichtete konjugierte Hyperkreisdurchmesser c und d durch ihre in bezug auf die Inzidenzhyperbel konjugierten Richtungen und den Hyperkreismittelpunkt bestimmt. Die Spiegelungsachsen der zugehörigen Umlegungen werden also zwei konjugierte Hyperbeldurchmesser γ, δ, während die Schiebungen längs dieser Achsen durch die orthogonalen Projektionen des Mittelpfeiles auf die beiden Achsen gegeben werden.

Die zweite Vorbemerkung betrifft den Abstand eines reellen Punktes ζ von einem komplexen Punkte x mit dem Bildpfeile $\xi \to \xi'$. ζ liege auf der Mittelsenkrechten des Pfeiles. Dann ist das Quadrat des absoluten Betrages des Abstandes $\overline{x\zeta}$ gleich dem Quadrat über dem Abstande $\overline{\xi\zeta} = \overline{\xi'\zeta}$.

Ist nun ζ ein reeller Punkt des Hyperkreises, also ein Punkt der Inzidenzhyperbel, so hat man, um die in 10 genannte Differenz zu finden, zunächst die Lote von ζ auf c und d zu fällen. Den Bildpfeil des Fußpunktes des von ζ auf c gefällten Lotes erhält man — nach der ersten Vorbemerkung —, wenn man die orthogonale Projektion des Mittelpfeiles auf γ so verschiebt, daß seine Mitte Fußpunkt des (reellen) von ζ auf γ gefällten Lotes wird. Bezeichnet man also mit l_γ die Länge des von ζ auf γ gefällten

[9]) Vgl. E. Study, a. a. O. S. 27.

Lotes, mit $2p_\gamma$ die Länge der orthogonalen Projektion des Mittelpfeiles auf γ, so ergibt sich — nach der zweiten Vorbemerkung — für das Quadrat des absoluten Betrages des Abstandes $C(\zeta)$ des Punktes ζ von der Geraden c der Ausdruck:

$$|C(\zeta)|^2 = l_\gamma^2 + p_\gamma^2. \tag{28}$$

Ebenso findet man:

$$|D(\zeta)|^2 = l_\delta^2 + p_\delta^2 \tag{29}$$

und daher stellt:

$$(l_\gamma^2 + p_\gamma^2) - (l_\delta^2 + p_\delta^2) \tag{30}$$

die gesuchte, für die Punkte des Hyperkreises konstante Differenz dar.

Daß dieser Ausdruck (also im wesentlichen die Differenz der Quadrate der von einem Punkte ζ der Hyperbel auf zwei konjugierte Durchmesser gefällten Lote) konstant bleibt, wenn ζ auf der Hyperbel wandert, ist ein bekannter Satz der Kegelschnittlehre. Er folgt hier als Spezialfall des Satzes 10 über Hyperkreise.

Zugleich hat sich — als Ergänzung zu Satz 5 — die geometrische Bedeutung der in die Größen p_γ, p_δ eingehenden *Länge* des Mittelpfeiles ergeben.

Eingegangen 30. März 1931.